

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

20. Band, Heft 4

27. Mai 1939

S. 145—192

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Tricomi, Francesco: Una proprietà caratteristica della legge Gaussiana degli errori. (*Firenze*, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 407—412 (1938).

Sind die rechtwinklig-ebenen Koordinaten eines Punktes mit der gleichen Genauigkeit ermittelt worden, so hängt die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt innerhalb eines gewissen kleinen Gebietes liegt, nur von der Größe dieses Gebietes und von dessen Entfernung vom Koordinatenursprung ab. Verf. zeigt, daß dieser Sachverhalt für das Gaußsche Fehlergesetz charakteristisch ist. Diese Aussage gilt allgemeiner in entsprechender Weise auch für den n -dimensionalen Raum und in sinngemäß abgeänderter Form für verschiedene Genauigkeiten der einzelnen Punktkoordinaten.

Schmehl (Berlin).

Lévy, Paul: Sur la division d'un segment par des points choisis au hasard. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 147—149 (1939).

Although the law governing the probability distribution of Z_n (the largest of the $n + 1$ intervals which are separated by n points chosen at random on the unit segment) is complicated for finite n , the author obtains the simple asymptotic relations that the probability of infinitely many realizations of $nZ_n < \log n - \log \log \log n - c$ is zero for $c > 0$ but unity for $c \leq 0$, and the probability of infinitely many realizations of $nZ_n > \log n + c \log \log n$ is zero if $c > 1$, and unity if $c \leq 1$. Albert A. Bennett.

Levy, Paul: Sur les propriétés de quelques lois indéfiniment divisibles. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1368—1370 (1938).

Die Gesetze mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x) = \frac{e^{-x} x^{s-1}}{\Gamma(s)}$, $x > s$, $f(x) = 0$, $x < 0$ [charakteristische Funktion $\varphi(z) = (1 - iz)^{-s}$] werden in die Gruppe der unbeschränkt teilbaren Gesetze eingeordnet; aus allgemeineren Annahmen wird das Gesetz mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-1/2x}$, $x > 0$ [charakteristische Funktion $\varphi(z) = e^{(-1+iz)\sqrt{z}}$] herausgearbeitet.

F. Knoll (Wien).

Dawatz, W.: Einige Probleme im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zap. russk. naučn. Inst. Beograd Nr 12, 1—12 (1937) [Russisch].

Supposons que $\varphi(x, n)$ soit la probabilité pour qu'un phénomène se produise, x étant le nombre de cas qui lui sont favorables et n celui de cas possibles. La fonction $\varphi(x, n)$ doit être une fonction croissante de la variable x ; dans le cas où il s'agit des variables continues, $\varphi(x, n)$ est une fonction monotone de x ($0 \leq x \leq n$) et elle doit satisfaire aux conditions $\varphi(\alpha + \beta, n) + \varphi(\alpha + \gamma, n) = \varphi(\alpha + \beta + \gamma, n) + \varphi(\alpha, n)$; $\varphi(\alpha, n) = \varphi(\alpha, \alpha + \beta)$, $\varphi(\alpha + \beta, n)$; $\varphi(0, n) = 0$; $\varphi(n, n) = k$. Si l'on admet de plus le principe de multiplication des probabilités, il faut que $\varphi(\alpha, n) = M(x) : M(n)$. La seule solution correspondant à toutes ces conditions est donnée par $M(x) = x$. — La probabilité pour qu'une fraction rationnelle soit irréductible est égale à $6 : \pi^2$ (Tchébycheff). L'auteur déduit la relation suivante où $\varphi(n)$ représente le nombre de nombres plus petits que n et sans diviseur commun avec n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_1^n \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2}.$$

L'auteur considère enfin le rapport entre la formule qui exprime la loi de Bernoulli-Laplace:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \text{probabilité pour que } sp - t\sqrt{2spq} < m < sp + t\sqrt{2spq}$$

et la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \text{probabilité pour que } \frac{m}{s} - t\sqrt{\frac{2mn}{s^2}} < p < \frac{m}{s} + t\sqrt{\frac{2mn}{s^2}};$$

p est la probabilité pour qu'un phénomène A se produise, s le nombre total d'épreuves, m le nombre d'épreuves où A s'est produit, $n = s - m$, $q = 1 - p$. *B. Hostinský.*

Bilimowitsh, A. D.: *Elementare Korrelationstheorie.* Zap. russk. naučn. Inst. Beograd Nr 12, 45—61 (1937) [Russisch].

Exposition élémentaire de la théorie de la corrélation. L'auteur n'introduit pas des notions sur les probabilités. Il montre comment on calcule certaines valeurs moyennes et écarts, le coefficient de corrélation etc. à partir des données statistiques.

B. Hostinský (Brünn).

Bridger, Clyde A.: *Note on regression functions in the case of three second order random variables.* Ann. math. Statist. 9, 309—313 (1938).

Ausdrücke für die charakteristischen Größen bei einer Korrelation zwischen drei zufälligen Variablen x, y, z , wo jede dieser Variablen nur zwei Werte annehmen kann.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Yosida, Kôzaku: *Operator-theoretical treatment of the Markoff's process.* Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 363—367 (1938).

Soit $P(x, E)$ la probabilité de passage, pendant une unité de temps, d'un point de l'intervalle $(0, 1)$ de la position x dans un ensemble de Borel E , faisant partie de cet intervalle (cas d'une chaîne de Markoff simple). Nous supposons que $P(x, E)$ soit complètement additive en E , x étant fixe, et que $P(x, E)$ soit mesurable par rapport à x , si E est fixe. La probabilité de passage après n unités de temps est donnée par la formule

$$P^{(n)}(x, E) = \int_0^1 P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E), \quad P^{(1)}(x, E) = P(x, E).$$

L'auteur donne une nouvelle démonstration de la formule asymptotique de $P^{(n)}(x, E)$ pour n très grand; il s'appuie sur des résultats précédemment établis (voir K. Yosida, Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 286; Yosida-Kakutami, ibid. p. 333; Yosida-Mimura-Kakutami, ibid. p. 359; ce Zbl. 19, 414). Il étudie en particulier les propriétés des ensembles finals. On a, pour presque tous les points x appartenant à un ensemble final G , $P(x, G) = 1$.

B. Hostinský (Brünn).

Doebelin, W.: *Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables.* Bull. Soc. Math. France 66, 210—220 (1938).

Kolmogoroff a développé la théorie des matrices infinies qui résultent par itération d'une matrice p_{ik} ($i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$). Posons

$$p_{ik} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1, \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(n-1)} p_{jk}, \quad P_{ik}^{(1)} = p_{ik}, \quad T_{ik} = \sum_{t=1}^n P_{ik}^{(t)}.$$

Il a démontré (voir ce Zbl. 18, 413) que $\frac{1}{n} T_{ik}^{(n)}$ tend vers une limite Π_k , si n augmente indéfiniment. Ces valeurs limites peuvent être égales à zéro et la question se pose si la limite de $T_{ij}^{(n)} : T_{ki}^{(n)}$ existe toujours pour n infini. — L'auteur suppose que l'on a, pour tous i et k , un n avec $P_{ik}^{(n)} > 0$ et il montre que les rapports $T_{ik}^{(n)} : T_{kk}^{(n)}$ et $T_{kj}^{(n)} : T_{kk}^{(n)}$ tendent pour n infini vers des valeurs déterminées, finies et différentes de zéro. Il étudie enfin la question suivante: En considérant p_{ik} comme probabilité de passage d'un système d'un état E_i à un état E_k il attache à chaque état E_i un nombre x_i et

il envisage une variable aléatoire $X^{(m)}$ égale à x_i , si à la $m^{\text{ième}}$ épreuve, l'état E_i est réalisé. Soit S_n la somme $\sum_1^n X^{(m)}$; il s'agit d'étudier S_n . Soit $K_{ij}^{(n)}$ la probabilité pour que le système parti de E_i se trouve après n épreuves dans E_j , mais ne se soit pas trouvé dans E_j à aucune des épreuves intermédiaires. Si $\sum i^2 K_{11}^{(n)} < \infty$, l'auteur indique des conditions suffisantes pour que la loi de probabilité de $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - na)$ tende vers une loi de Gauss d'un certain écart-type et de moyenne nulle; a est une constante convenable.

B. Hostinský (Brünn).

Doeblin, Wolfgang: Sur l'équation de Kolmogoroff. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 705—707 (1938).

Un point M se meut au hasard sur une droite. Soit $F(x, y; s, t)$ la probabilité pour que M , se trouvant à l'instant s en x , se trouve à l'instant t ($t > s$), à gauche de y , cette probabilité ne dépendant pas du mouvement du point mobile antérieur à l'instant t . Supposons que les limites suivantes existent

$$\lim_{\substack{t \rightarrow s \\ |y-x| < 1}} \frac{1}{t-s} \int (y-x)^h d_y F(x, y, s, t) = \begin{cases} a(x, s) & \text{pour } h = 1 \\ \sigma^2(x, s) & \text{pour } h = 2. \end{cases}$$

Sous certaines hypothèses relatives à la fonction F qui vérifie l'équation

$$F(x, y; s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y; u, t) d_x F(x, z, s, u), \quad s < u < t$$

l'auteur énonce quelques propriétés relatives à la continuité de l'abscisse $X(t)$ du point mobile. Le mouvement local résulte, si $\sigma \neq 0$, de la superposition par addition d'un déplacement non aléatoire de vitesse $a(x, s)$ et d'un mouvement gaussien de moyenne nulle. B. Hostinský.

Wold, Herman: On the inversion of moving averages. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 208—217 (1938).

Verf. vertieft und verallgemeinert im Anschluß an seine Dissertation (dies. Zbl. 19, 356) die von ihm erhaltenen Resultate hinsichtlich der Umkehrung von gleitenden Mittelwerten. Sind $\dots, \eta(t-1), \eta(t), \eta(t+1), \dots$ eindimensionale zufällige Variablen, b_0, \dots, b_h reelle Konstanten und sind die Variablen $\zeta(t)$ mit den Variablen $\eta(t)$ durch die Relationen $\zeta(t) = b_0 \cdot \eta(t) + b_1 \cdot \eta(t-1) + \dots + b_h \cdot \eta(t-h)$ (1)

verbunden, dann handelt es sich darum, aus der Verteilung der Punkte

$$(\zeta) = (\dots, \zeta(t-1), \zeta(t), \zeta(t+1), \dots)$$

in einem ω -dimensionalen Raume die Verteilung der entsprechenden Punkte

$$(\eta) = (\dots, \eta(t-1), \eta(t), \eta(t+1), \dots)$$

abzuleiten oder — in der Ausdrucksweise des Verf. — die stochastische Differenzengleichung (1) aufzulösen. — Verf. zeigt, daß die Gestalt der Lösung davon abhängt, ob die (1) entsprechende charakteristische Gleichung

$$z^h + b_1 \cdot z^{h-1} + \dots + b_h = 0 \quad (b_0 = 1 \text{ und } b_h \neq 0 \text{ vorausgesetzt})$$

komplexe Wurzeln mit $|z| = 1$ besitzt oder nicht, und gibt die Formen der Lösung an. — Gewisse Analogien zwischen den Lösungen und verschiedenen Summabilitätsformeln bei unendlichen Reihen werden hervorgehoben. W. Simonsen.

Frisch, Ragnar: On the inversion of a moving average. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 218—225 (1938).

Es werden im Anschluß an die vorstehend besprochene Arbeit abgeänderte Formen für die Lösung der stochastischen Differenzengleichung $\zeta(t) = b_0 \cdot \eta(t) + b_1 \cdot \eta(t-1) + \dots + b_h \cdot \eta(t-h)$ abgeleitet, die für praktische Zwecke mehr geeignet sind, insbesondere wenn die charakteristische Gleichung dieser Differenzengleichung singuläre Wurzeln besitzt. W. Simonsen (Kopenhagen).

Cisbani, Renzo: Contributi alla teoria delle medie. II. Metron 13, 3—20 (1938).

Der erste Teil der Arbeit ist in dies. Zbl. 18, 266 besprochen worden. Nun werden zwei weitere Beiträge gegeben. Der Verf. entnimmt zunächst Gini (dies. Zbl. 18, 414)

den Begriff eines „gewogenen potenzierten Mittelwertes von n Größen“ (*media ponderata potenziata di n quantità*) und beweist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dieser zwischen deren Maximal- und Minimalwert liege. Eine ähnliche Bedingung wird auch bewiesen für einen analog konstruierten Mittelwert einer integrierbaren, positiven und wachsenden Funktion, die in einem endlichen Intervall gegeben ist. — Danach wird eine Verallgemeinerung des Begriffes des arithmetischen Mittels angegeben für statistische Serien von qualitativen Merkmalen auf Grund geometrischer Überlegungen; die üblichen Streuungsmaße finden hier eine zweckmäßige Interpretation. Beide Beiträge sind mit numerischen Beispielen versehen.

Kolodziejczyk (Warschau).

Gini, C., e G. Zappa: *Sulle proprietà delle medie potenziate e combinatorie.* *Metron* **13**, 21—31 (1938).

Fortsetzung einer in dies. Zbl. **18**, 414 besprochenen Arbeit von Gini. Es werden hier einige dort schon angezeigte Eigenschaften der studierten neuen Typen von Mittelwerten bewiesen.

Kolodziejczyk (Warschau).

Sawkins, Dansie T.: *The use of cumulative graphs for estimation of means, higher moments, etc.* *Metron* **13**, 33—47 (1938).

Marcinkiewicz, Joseph: *Sur le problème des moments.* *C. R. Acad. Sci., Paris* **208**, 405—407 (1939).

Ergänzungen zu Sätzen von Carleman und Lévy über die Bestimmtheitsfrage im Momentenproblem.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Nair, U. S.: *The application of the moment function in the study of distribution laws in statistics.* *Biometrika* **30**, 274—294 (1939).

Ist die „Momentenfunktion“ (moment function)

$$\Phi(t) = \int \dots \int_{R_n} \theta^t p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

einer nichtnegativen Funktion $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n zufälligen Veränderlichen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bekannt, dann kann deren Verteilung, $p(\theta)$, mittels der Umkehrungsformel

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \theta^{-t-1} \Phi(t) dt$$

ermittelt werden, vorausgesetzt daß beide Integrale existieren. Die Auswertung des letzteren erfolgt im allgemeinen mit Hilfe der Kurvenintegration, im Spezialfalle jedoch, wenn $\Phi(t)$ der Gleichung

$$\Phi(t+a) = \Phi(t) \cdot A(t)/B(t) \quad (A(t), B(t) \text{ Polynome von } t)$$

genügt, durch Lösung der Differentialgleichung

$$A\left(-\theta \frac{d}{d\theta} - 1\right) p\theta - \theta^a B\left(-\theta \frac{d}{d\theta} - a - 1\right) p(\theta) = 0.$$

Auf diesem Wege berechnet der Verf. Verteilungsfunktionen für die von Neyman-Pearson (dies. Zbl. **4**, 157) und Wilks (dies. Zbl. **6**, 23) betrachteten Momentenfunktionen.

Kolodziejczyk (Warschau).

Calabrese, Donato Miani: *I principali risultati conseguiti in Italia, negli ultimi anni, nel campo delle applicazioni della statistica alle scienze biologiche e sociali.* (*26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.*) *Atti Soc. ital. Progr. Sci.* **2**, 114—172 (1938).

Fisher, R. A.: „Student.“ *Nachruf auf W. S. Gosset.* *Ann. of Eugen.* **9**, 1—9 (1939).

Hsu, P. L.: *Notes on Hotelling's generalized T.* *Ann. math. Statist.* **9**, 231—243 (1938).

In the simultaneous elementary probability law for variables in a matrix array the exponential terms involve certain parameters of translation. Hotelling has given a T -test generalizing the t -test of "Student", for the hypothesis that all these parameters vanish. Under this hypothesis the distribution of T was given. But one's

knowledge of the test is hardly complete unless one knows also the distribution of T when not all these parameters vanish. The author provides the solution of this problem in explicit form, by intermediate use of the Laplace transform of the elementary probability law for T . Later he shows that in terms of the power of the critical region to detect the falsehood of the hypothesis, that all the aforementioned parameters vanish, the T -test is the most powerful of its kind. Finally some novel applications of the T -test are made to multiple-variate normal surfaces with various unknown parameters.

Albert A. Bennett (Providence).

Hsu, P. L.: Contribution to the theory of „student's“ t -test as applied to the problem of two samples. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 2, 1—24 (1938).

Given two unconnected normal populations with given respective means and variances, suppose that a sample is drawn from each. Tests for hypotheses of likeness of populations, based on the samples drawn fall usually into three types. (A) That the corresponding means and variances are equal as against all alternative hypotheses, (B) merely that the means are equal, (C) that the means are equal, the variances being accepted without inquiry as being equal. The t -test completely answers (C). The other two are here subjected to an extensive analytic investigation with tabular and graphical aids, but with results largely negative. In case that the sample sizes are the same, the u -test may safely used for (B). The distribution of the statistic u , ($= t^2$), is examined by expanding the probability $p(u)$ in an infinite series, which in certain cases is reducible to a finite expression. These finite expressions are given explicitly in some seven cases. The power function of the u -test (in the sense of Neyman and Pearson) is next examined, and brief tables are obtained. The question of the distribution of points of bias (for which at specified significance level, certain false hypotheses are less likely to be rejected than true ones) is discussed in concluding remarks.

Albert A. Bennett (Providence).

Hsu, P. L.: On the best unbiased quadratic estimate of the variance. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 2, 91—104 (1938).

Part of the Markoff Theorem on linear estimation states that a certain quadratic form in the observational data serves as an unbiased estimate of the unknown variable. By matrix methods the author obtains necessary and sufficient conditions that a given quadratic form in the independent random variates be the best unbiased quadratic estimate of the variance. Some numerical illustrations are provided.

Bennett.

Gumbel, Emil J.: Les valeurs de position d'une variable aléatoire. *C. R. Acad. Sci., Paris* 208, 149—151 (1939).

The terms “median” and “quartile” may be used for the theoretical continuous distribution of the total population, while “central” and “quartal” may be applied to the analogous magnitudes computed for the histogram corresponding to a small number of observations. Simple linear interpolation gives an aspect of precision, in reality non-existent, to the results obtained. Asymmetric curves particularly, and even symmetric curves show by comparison of moments that correction terms to account for grouping may be called for.

Albert A. Bennett (Providence).

Pitman, E. J. G.: The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. *Biometrika* 30, 391—421 (1939).

Pearson, E. S.: Note on professor Pitman's contribution to the theory of estimation. *Biometrika* 30, 471—474 (1939).

Assume for a continuous chance variable, a probability function of known form involving two parameters of scale magnitude, and of location (or translation) respectively. From n independently observed values of the variable, one obtains conditions from which to estimate these parameters. Any function of the sample values serving to provide an estimate of an unknown parameter is called an estimator of this parameter. In certain cases a best estimator exists, one whose median value is the true value and which is likely to give a closer estimate than any other estimator. Technical

limits for the unknown parameters are determined. The author seeks to identify in substance problems of estimation and those of fiducial distribution. Applications are made to normal populations and to two mutually similar populations. — In an editorial note, E. S. Pearson, emphasizes the distinction between the related subjects of Fisher's theory of fiducial probability and Neyman's theory of confidence intervals. Both are concerned not with a stated probability that the estimated parameter lies between fixed limits but that a variable statement about this parameter made according to a specified rule will be correct. Prof. Pitman seems to impose early a restriction on the form of his regions of acceptance while Neyman treats of an arbitrary system of confidence intervals. The former follows Fisher's suggestion, not for cases where a sufficient estimate of the unknown parameter exists but for the sampling distribution of an estimate within samples having a given configuration. *Albert A. Bennett.*

Thompson, William R.: Biological applications of normal range and associated significance tests in ignorance of original distribution forms. *Ann. math. Statist.* 9, 281—287 (1938).

This paper deals in section 1 with the development of the theory of estimation of "normal ranges", where the form of the frequency distribution of the universe is supposed unknown. The cases of central confidence range (with specified confidence) and 90% central normal ranges are considered and the results expressed by integrals. Charts of data for normal horses and observed values of plasma concentration of given constituents are exhibited. Illustrative material is also presented for a corresponding study, in section 2, of significance tests. The abundance of analogous problem material suggests that the tests here proposed may prove powerful and useful in the analysis of much experimental data. *Albert A. Bennett (Providence).*

Ledermann, Walter: Sampling distribution and selection in a normal population. *Biometrika* 30, 295—304 (1939).

A normal population is considered, which is specified by two sets of p and q variates resp., whose variances and covariances are arranged in a matrix $R = \begin{pmatrix} R_{pp} & R_{pe} \\ R_{eq} & R_{qq} \end{pmatrix}$ (the variance matrix of the $p + q$ variates). A selection is carried out in the population in such a way, that all variates remain normally distributed, and that the variance matrix of the first set is changed from R_{pp} to V_{pp} , which may be any preassigned matrix provided it is symmetrical and positive definite. The problem was first solved by K. Pearson. The variance matrix V after selection has been given by Aitken. It is the object of this paper to show, that selection can be regarded as the limiting case of a certain regression problem with respect to the population of variance matrices computed for all possible samples of n individuals. — Thus the selection in Pearson's sense means finding the average value of the variance matrix with respect to the population of all possible infinite normal samples which are subject to the condition that the variance matrix of the first set of variates is equal to the preassigned matrix V_{pp} . That is the statement of G. H. Thomson, and in this paper is given an analytical proof of it by deriving an explicit formula for the average of the variance matrix.

Janko (Praha).

David, F. N.: Limiting distributions connected with certain methods of sampling human populations. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 2, 69—90 (1938).

The author demonstrates the following extensions of theorems of Laplace and Liapounoff: 1° Let a finite population of kN individuals consist of s groups, the i -th group containing kn_i individuals ($i = 1, \dots, s$; $n_1 + \dots + n_s = N$). Assume that a random sample of kM ($M < N$) individuals is drawn from the population without replacement, and let km_i be the number of samples falling within the i -th group ($m_1 + \dots + m_s = M$). Put $p_i = n_i/N$ and $z_i = kM \left(\frac{m_i}{M} - p_i \right) / \sqrt{kM p_i \left(1 - \frac{M}{N} \right)}$; then if $k \rightarrow \infty$, (z_1, \dots, z_{s-1}) will tend to being a continuous $(s-1)$ -dimensional

variate with normal distribution. — 2° Let X be a variable character, the domain of which is the finite population considered, and let the i -th group consist of those individuals, for which $X = u_i$ ($i = 1, \dots, s$). Then if $\bar{x} = \frac{1}{M} (m_1 u_1 + \dots + m_s u_s)$, \bar{x} will tend to be a continuous variate with normal distribution, as $k \rightarrow \infty$. — The results obtained are applied to find the limiting distribution of the weighted mean of a sample drawn from a finite population with random weights. As a corollary it is proved that a quadratic estimate recently investigated by J. Neyman [J. Amer. Statist. Assoc. 33, 101 (1938)] is normally distributed.

W. Simonsen (Copenhagen).

Richards, Oscar W., and Arthur J. Kavanagh: The course of population growth and the size of seeding. *Growth* 1, 217—227 (1937).

Eine Bakterienkultur der Anfangsgröße N_0 besitzt ein Wachstumsgesetz der Form $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = f(N - N_0)$, wenn die Kulturbedingungen zur Zeit t sich allein aus dem Bevölkerungszuwachs $N - N_0$ berechnen lassen. Verff. prüfen diese Annahme an einer Hefekultur unter Zugrundelegung von acht verschiedenen N_0 -Werten; es ergibt sich für f empirisch eine Funktion der Form $f(n) = e^{-(cn+d)}$, $n = N - N_0$, wo c, d aus dem Kurvenverlauf leicht zu bestimmende Konstanten sind. Das integrierte Wachstumsgesetz lautet also $Ei(cN) = t \cdot e^{N_0-d} + Ei(cN_0)$, wobei $Ei(x)$ das Exponentialintegral bedeutet. Die Versuche zeigen, daß dieses Gesetz jedenfalls im ersten biologischen Zykel gut erfüllt ist. Die Abweichung von der logistischen Kurve, bei der $f(n)$ linear in n ist, ist beachtenswert.

Harald Geppert (Gießen).

Physikalische Statistik:

Reiner, John M.: Diffusion and biological membrane permeability. I. *Growth* 1, 313—327 (1937).

Behandlung der Diffusion von Molekülen aus dem Innern einer kugelförmigen Zelle durch die Zellwand, gemäß der Gleichung von Fick: $I = -D \text{grad } c + B/c$, wo I = Diffusionsstrom, D = Diffusionskoeffizient, c = Konzentration, f = Kraft, die von den Molekülen der Membran auf das diffundierende Teilchen ausgeübt wird, B = Beweglichkeit des diffundierenden Teilchens $= D/kT$. I ist nicht bekannt, die Gleichung läßt sich aber formal integrieren und daraus ein Mittelwert von I innerhalb der Membran angeben. D ist durch die mittlere freie Weglänge λ und die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens bestimmt. λ wird mit den Methoden der kinetischen Gastheorie berechnet; die Mizellen der Membran werden dabei als Teilchen von rotationsellipsoidischer Form schematisiert.

K. Bechert (Gießen).

Young, G., and J. M. Reiner: Mechanical forces and torque on an ellipsoid in diffusion fields in connection with the problem of orientation of colloidal micellae in biological systems. *Growth* 1, 251—261 (1937).

Es wird die Diffusionsaufgabe gestellt: Gegeben eine stationäre Diffusion, d. h. eine Konzentrationsverteilung $c_1(xyz)$; wie ändert sich c_1 durch das Einbringen eines Ellipsoids, durch dessen Oberfläche keine Diffusion stattfindet? Die Lösung ergibt sich nach der Methode der Bilder als Überlagerung $c = c_1 + c_2$ aus der ursprünglichen Verteilung c_1 und einer „Bildfunktion“ c_2 , welche die Randbedingung erfüllen hilft, im Unendlichen verschwindet und außerhalb des Ellipsoids der Gleichung $\Delta c_2 = 0$ genügt. c_2 wird als Reihe nach zugeordneten Kugelflächenfunktionen 1. und 2. Art, und nach Ferrers zugeordneten Funktionen dargestellt. — Da die Konzentration c längs der Ellipsoidfläche veränderlich herauskommt, so wird ein von der Konzentration abhängiger Druck im allgemeinen eine Kraft und ein Drehmoment auf das Ellipsoid ausüben. Beide werden allgemein berechnet unter der Annahme, daß der Druck p der Konzentration c proportional ist, was für verdünnte Lösungen zutrifft. Kraft und Drehmoment hängen vom ursprünglichen Feld c_1 ab; sie werden für 3 spezielle Felder c_1 ausgerechnet. Die hierbei getroffene Wahl der c_1 ist durch biologische Über-

legungen nahegelegt, das Ellipsoid ist ein Modell für einen häufig vorkommenden Zelltyp. *K. Bechert (Gießen).*

Landahl, Herbert D.: Mathematical biophysics of cell respiration. Growth 1, 263—277 (1937).

Behandlung der stationären Diffusion durch eine Kugelfläche, in deren Inneren durch chemische Reaktionen drei Stoffe zerfallen bzw. gebildet werden. (Es handelt sich um Zellatmung: Zerfall von Glucose in Milchsäure und Reduktion der Milchsäure.) Die Differentialgleichungen für die Konzentrationen c_i werden näherungsweise gelöst durch den Ansatz $c_i = A_i + B_i r^2$; r ist die Entfernung vom Kugelmittelpunkt.

K. Bechert (Gießen).

Jordan, P.: Über biologische Wirkungen ultravioletter Lichtquanten. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 281—288 (1938).

Jordan, P.: Zur Analyse der biologischen Wirkung von Strahlungsquanten. (14. Dtsch. Physik.- u. Math.-Tag, Baden-Baden, Sitzg. v. 11.—16. IX. 1938.) Z. techn. Physik 19, 389—391 u. Physik. Z. 39, 951—953 (1938).

Eine Zelle von *Bacterium coli* kann durch einen einzigen quantenphysikalischen Elementarprozeß (Absorption eines ultravioletten Lichtquants, Bildung eines Ionenpaares) getötet werden. Sättigungserscheinungen bei großer räumlicher Dichte der gebildeten Ionen weisen auf die Existenz eines kleinen hochempfindlichen „Steuerungszentrums“ der Zelle hin. Die geringe Tötungsausbeute von Ultraviolettabsorptionen in diesem Bereich wird verständlich gemacht. *C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).*

Reboul, Jean: Théorie générale de l'action des rayons X sur les éléments biologiques. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 229—231 (1939).

Eine bekannte in der Strahlenbiologie viel benutzte Formel (auf einfacher Anwendung der Poissonschen beruhend) beantwortet die Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Strahlendosis D überlebt von einem Individuum, das $n - 1$, aber nicht n „Treffer“ überleben kann, wenn während der Vermehrung von D um dD mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha \cdot dD$ ein Treffer geschieht. — Verf. gibt eine verallgemeinerte Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Individuums, das nach Abringung von $n, n + 1, n + 2, \dots$ Treffern noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt.

P. Jordan (Rostock).

Reboul, Jean: Action des rayons X sur les éléments biologiques; le facteur de récupération. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 541—542 (1939).

Betrachtungen über den „Zeitfaktor“ der biologischen Röntgenwirkungen, bedingt durch Erholungsvorgänge. Ein Versuch formelmäßiger Darstellung des Effektes wird vorgetragen. Jedoch ist dieser Versuch als unzulänglich zu betrachten; das Problem hat bereits wesentlich erfolgreichere theoretische Behandlung in der Literatur gefunden (Rajewsky-Dänzer; Swann-del Rosario; Lea). *P. Jordan (Rostock).*

Snell, George D.: The induction by irradiation with neutrons of hereditary changes in mice. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 11—14 (1939).

Neutronenbestrahlung von Mäusen gibt — wie nicht anders zu erwarten — ähnliche genetische Effekte, wie Röntgenbestrahlung. Phänotypisch leicht erkennbare Genmutationen wurden nicht beobachtet, wohl aber Chromosomenmutationen (translocations), die sich auch in Sterilitätserscheinungen äußern. Ob eine gewisse hier gefundene quantitative Verschiedenheit der mit Neutronen erzielten Ergebnisse gegenüber den röntgeninduzierten reell ist, wird erst auf Grund umfangreicheren Materials entschieden werden können.

P. Jordan (Rostock).

Campbell, Norman: The fluctuation theorem. (Shot effect.) Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 127—129 (1939).

Kritische Bemerkungen zu den Theorien des Schroteffektes von Rowland (dies. Zbl. 15, 261; 17, 176) und von Schottky [Ann. Physik 57, 541 (1918)]. *J. Meixner.*

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

Koepler, Hans: Eine Art des jährlichen Risikos für eine mittlere Anzahl gleichartiger nach derselben einfachen Versicherungsform Versicherten. *Giorn. Mat. Finanz.*, II. s. 8, 26—50 (1938).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Risiko eines Unternehmens, wo ein jeder von s Spielern den Einsatz E hat, um im Falle des Gewinnens (des Eintritts des Ereignisses) den Preis A zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist q , des entgegengesetzten p . Wenn von den s Spielern m den Preis A erhalten und die anderen den Einsatz verlieren, ist das Risiko des Unternehmers durch die Summe:

$$R = \sum_{m=k+1}^{m=s} \frac{s!}{m!(s-m)!} \cdot q^m \cdot p^{s-m} (m \cdot A - s \cdot E)$$

dargestellt. Der Verf. beschäftigt sich mit der Vereinfachung der Summierung erstens durch eine Gaußsche hypergeometrische Reihe anstatt zwei bisher von Hattendorf und Mach benutzten. Dann wird zu demselben Zweck eine Methode von Dienger, mit der er den mittleren Gewinn berechnet hat, angewendet. Drittens werden zu derselben Vereinfachung der Formel für R die Integrale von Laplace benutzt. In weiteren Abschnitten werden andere Mittel angewendet, und zwar gewisse Summen von Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich namentlich Oettinger beschäftigt hatte, dann eine Berechnungsweise von Poincaré, die nur partielle Differentiation benutzt. Im sechsten und siebenten Abschnitt wird das besprochene Risiko durch ein elementares Verfahren berechnet, zu dem dem Verf. die Aufsätze von Mucha und R. Frisch Anlaß gegeben haben. Zum Schluß wird die auf so vielerlei Weise berechnete Formel des Risikos auf einen Bestand von s untereinander gleichen gemischten oder lebenslänglichen Todesfallversicherungen und der Erlebensfallversicherungen angewendet.

Janko (Praha).

Cantelli, F. P.: Sulle leggi di mutualità e sulle equazioni delle riserve matematiche. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 9, 159—169 (1938).

Es wird das Deckungskapital einer allg. Form von Lebensversicherungen, „capitale accumulato“, wie es der Verf. nennt, betrachtet, dessen Integralgleichung und eine mit ihm verbundene Verallgemeinerung des Erlebensgesetzes, das sog. „legge di mutualità“. Die entsprechenden Formeln hat der Verf. einer seiner früheren Arbeit entnommen (*Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza*, Roma 1914, Nr 3). Hier wird deren Anwendungsbereich besprochen. Es wird dabei gezeigt, daß auch Funktionen, die negative Werte annehmen, als „capitali accumulati“ betrachtet werden können; man kann ihnen nämlich eine finanzielle Bedeutung zuschreiben. — Ferner wird noch bewiesen, daß ein für die ganze Versicherungsdauer vorausgegebenes „capitale accumulato“ das ihm entsprechende „legge di mutualità“ eindeutig bestimmt; man muß jedoch voraussetzen, daß das „legge di mutualità“ vom Prämiensatze unabhängig ist.

Kolodziejczyk (Warschau).

Ten Pas, W. G. J.: Der Einfluß abnormer Sterblichkeitsquotienten auf die linearen Sterbechancen. *Verzekerings-Arch.* 19, (155)—(163) (1938) [Holländisch].

Giaccardi, F.: Sul calcolo del coefficiente riduttivo del tasso annuo di morbidità. *Giorn. Mat. Finanz.*, II. s. 8, 51—56 (1938).

In der bekannten Reihenentwicklung von $e^{\phi(t-t^{-1})}$ nach Besselfunktionen wird $t - t^{-1} = \frac{1}{z}$ gesetzt, sodann wird das Integral $\int_{c-t}^{c+t} e^{-az+bz^{-1}} dz$ durch diese Reihe ermittelt; die dabei auftretenden Integrale $\int_{c-t}^{c+t} z^{-n} e^{-az} dz$ lassen sich auf den Integrallogarithmus und auf die Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}$ zurückführen; als Anwendung wird die bekannte Ermittlung des Reduktionsfaktors in der Krankenversicherung und eine

Anwendung in der Finanzmathematik, Barwert einer kontinuierlichen, temporären Zeitrente bei oszillierender Verzinsungsintensität, gegeben. *F. Knoll* (Wien).

Bijl, L.: Etwas über die Höcknersche Korrektur für Untersterblichkeit bei Leibrentnern. *Verzeerings-Arch.* 19, (164)—(167) (1938) [Holländisch].

G. Höckner hat (Ber. d. VII. internat. Aktuarkongr. i. Amsterdam 1912) bemerkt, daß Änderungen von Sterblichkeit q_x und Zinsfuß i nach Maßgabe der Formeln: $q_x^I = q_x + \alpha(1 - q_x)$, $i^I = i - \alpha(1 + i)$ die Leibrenten $a_{x:\overline{n}|}$ ungeändert lassen. — Verf. untersucht den Fall, in welchem $q_x^I < \alpha$ in den jüngeren Altern x . *Simonsen*

Bijl, L.: Eine Einzelbemerkung über den Charakter der Prämienkorrektur bei Terminalzahlungen. *Verzeerings-Arch.* 19, (168)—(170) (1938) [Holländisch].

Verf. beweist die Formel für die Nettoreserve bei $\frac{1}{m}$ -jährlicher Prämienzahlung ${}_tV = {}_tV^{(m)} + p \cdot P \cdot {}_tV^{(1)} \frac{1}{x+t:\overline{n-t}|}$ unter der Voraussetzung, daß die Leibrenten $a_{x+t:\overline{n-t}|}^{(m)}$ und $a_{x+t:\overline{n-t}|}^{(1)}$ durch die Annäherungsformel $a_{x+t:\overline{n-t}|}^{(m)} = a_{x+t:\overline{n-t}|}^{(1)} - p(1 - n - E_{x+t})$ verbunden sind. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Bruyn, A. de: Negative und unendlich große Prämien und Kaufsummen. *Verzeerings-Arch.* 19, (145)—(154) (1938) [Holländisch].

Invrea, Raffaele: Le ricerche italiane nel campo della matematica attuariale, durante gli anni XIV—XV E. F. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) *Atti Soc. ital. Progr. Sci.* 2, 61—90 (1938).

Numerische und graphische Methoden.

Lorey, Wilhelm: Über Wurzelberechnungen. *Norsk mat. Tidsskr.* 20, 85—90 (1938).

Der Verf. empfiehlt, an den Schulen statt des gewöhnlichen Quadratwurzelziehens, dessen Einübung viel Zeit erfordert, das Iterationsverfahren, das, wie am Schluß bemerkt wird, mit dem Newtonschen Näherungsverfahren übereinkommt, zu lehren.

L. Schrutka (Wien).

Lorey, Wilhelm: Über Wurzelberechnungen. *Norsk mat. Tidsskr.* 20, 117—126 (1938).

Fortsetzung zum gleichnamigen Aufsatz (vgl. vorsteh. Referat). Berechnung von Quadratwurzeln durch wiederholte Bildung des arithmetischen und des harmonischen Mittels. Ausdehnung auf höhere Wurzeln. Berechnung von Irrationalitäten durch Darstellung des Exponenten im Zweiersystem und Ausführung von Quadratwurzelziehungen.

L. Schrutka (Wien).

Tănăsescu, Tudor A.: Elektrisches Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen. *Gas. mat.* 44, 287—292 (1939) [Rumänisch].

Soit $f(x) = x^n + \dots = 0$ une équation de degré n . Dans le plan xOy , où l'axe Oy est dirigé suivant le méridien magnétique terrestre local, on place n conducteurs, perpendiculairement au plan, aux points d'abscisses a_1, a_2, \dots, a_n [$f(a_i) \neq 0$] et traversés par des courants électriques d'intensités I_1, I_2, \dots, I_n où

$$\frac{H_0 f}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = H_0 + \sum_{i=1}^n \frac{0,2 I_i}{x - a_i},$$

H_0 étant la composante suivant Oy du champ magnétique terrestre. Les affixes des points du plan, qui peuvent être déterminés expérimentalement, où le champ magnétique résultant est nul sont les racines de l'équation. *T. Popoviciu* (Cernăuți).

Platone, Giulio: Sulla risoluzione approssimata dei sistemi di equazioni. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) *Atti Soc. ital. Progr. Sci.* 1, 17—24 (1938).

Verf. löst durch Induktion das System $f_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(P) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) unter den Annahmen, es sei $f_i(P) < 0$ auf der Seite $x_i = a_i$ und $f_i(P) > 0$ auf $x_i = b_i$ eines n -Parallelepipeds R , in dem die f_i stetig sind und höchstens einmal von Parallelen

zu gewissen Achsen geschnitten werden. Nennt man jeden Punkt P eine „praktische Lösung“, der f_i praktisch vernachlässigbar (zu Null) macht, so zerfallen die Lösungen in eigentliche (wenn sie eine exakte Lösung approximieren) und in uneigentliche (im Gegenfall). Löst man jetzt ein System von $n - 1$ Gleichungen, so lassen sich die Schnitte der Kurve $f_1 = f_2 = \dots = f_{n-1} = 0$ mit den Ebenen $x_n = a_n$, $x_n = b_n$, $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ durch drei $(n - 1)$ -Parallelepipede A, B, C annähern. Wenn $f_n(P)$ in den Ecken von C nicht dasselbe Zeichen hat, so nähert C eine praktische Lösung an; im Gegenfall stellt das kleinste n -Parallelepipede R_1 , welches A und C oder B und C enthält, in zweiter Näherung die Lösung dar, um die es sich handelt. Man wiederholt das Verfahren auf R_1 und erhält unter Iteration eine Schachtelungsfolge von n -Parallelepipeden, deren jedes alle folgenden ebenso wie die exakte Lösung enthält und deren Diagonalen schließlich kleiner werden als ε . — Es wird noch ein zweites Verfahren angedeutet, für $n = 2$, welches die Kurven $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ durch polygonale Näherungstreifen ersetzt; dieser Begriff kann auf beliebiges n ausgedehnt werden.

Conforto (Rom).

Zimmermann, Fritz: Nomogramme für komplexe Ausdrücke. Arch. Elektrotechn. 32, 789—798 (1938).

Es werden Fluchtentafeln für komplexe Funktionen eines komplexen Argumentes (Exponentialfunktion, Logarithmus, Reziprokes, Quadratwurzel, Hyperbelfunktionen) angegeben und zur Erzielung günstiger Schnitte projektiv verwandelt. Die 4 Größen Realteil und Imaginärteil von Funktion und Argument erscheinen je auf einer Leiter.

Theodor Zech (Darmstadt).

Masuyama, Motosaburo: Graphische Berechnung des Wertes einer realzahligen Determinante. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 803—807 u. engl. Zusammenfassung 808 (1938) [Esperanto].

Gibt ein graphisches Verfahren zur Berechnung einer Determinante, zugleich mit Anweisungen für den Fall, daß Schnittpunkte zu weit entfernt liegen. Bodewig.

Banachiewicz, T.: Ein Beispiel der Krakovianentechnik in der Methode der kleinsten Quadrate. Acta astron., Sér. c 3, 146—148 (1938).

Frost, D. W.: Zur Theorie der kleinsten Quadrate. Zap. russk. naučn. Inst. Beograd Nr 12, 71—76 (1937) [Russisch].

Herleitung der mittleren Fehler bei vermittelnden Beobachtungen. Zech.

Bonsdorff, Ilmari: Bestimmung der Gewichte, wenn lauter Unterschiede der Unbekannten beobachtet worden sind. (10. Tag., Kaunas, Sitzg. v. 14.—17. VI. 1938.) Verh. Balt. geodät. Komm. 114—125 (1938).

Es wird ein System von Fehlergleichungen $L_{ij} = a_i + x_j$ mit $\sum_j x_j = 0$ betrachtet, wobei a_i und x_j unbekannte Größen, dagegen L_{ij} aus der Messung, mit den Gewichten p_i , ermittelte Zahlen bedeuten. Verf. findet genaue und angenäherte Ausdrücke für die Gewichte von x_i und $x_i - x_j$. Ein Beispiel aus den baltischen Längenbestimmungen 1929 wird beigegeben.

Kołodziejczyk (Warschau).

Wells, Edward H.: The mechanical side of mechanico-graphic graduation. Trans. Actuar. Soc. Amer. 38, 384—401 (1937).

Description of a mechanical device by means of a system of wires and springs to graduate a series of observations according to the method of graduation of Whittaker and Henderson.

W. Simonsen (Copenhagen).

Spoerl, Charles A.: The Whittaker-Henderson graduation formula A. Trans. Actuar. Soc. Amer. 38, 403—462 (1937).

The author gives a comprehensive account of the method of graduation of Whittaker and Henderson, the principle of which is that, v_1, \dots, v_m being a series of observations, the corresponding graduated values u_1, \dots, u_m are to be determined

so as to make the expression $\sum_{x=1}^m (\Delta^n u_x)^2 + \varepsilon \sum_{x=1}^m (u_x - v_x)^2$ a minimum, n and ε being fixed.

W. Simonsen (Copenhagen).

Bompiani, Enrico: Un procedimento di integrazione approssimata. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 161—167 (1938).

Es handelt sich darum, $I = \int_a^b f(x) dx$ auszuwerten. Das Verfahren beruht auf einer Einteilung des Intervalls (a, b) in n Stücke gleicher Länge h mit den Teilpunkten $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, denen, auf der Kurve $y = f(x)$, die Punkte P_0, P_1, \dots, P_n entsprechen. Als Näherungswert für I dient die Summe der folgenden Flächeninhalte: Für (x_0, x_1) und (x_{n-1}, x_n) die Inhalte der Trapezoide, welche nach oben von den Parabeln (mit Achsen parallel zur y -Achse) begrenzt sind, die durch die Punkte P_0, P_1, P_2 bzw. P_{n-2}, P_{n-1}, P_n gehen. Für die übrigen Stücke (x_i, x_{i+1}) wird das Mittel der Inhalte jener zwei Trapezoide verwendet, welche oben begrenzt sind von analogen Parabeln durch die Punkte P_{i-1}, P_i, P_{i+1} bzw. P_i, P_{i+1}, P_{i+2} . Verf. zeigt, daß man so eine Näherungsformel mit Konvergenz von der Ordnung h^4 erhält (wie die von Cavalieri-Torricelli-Simpson), die aber zudem den Vorteil bietet, viel besser geeignet zu sein für graphische Integration; denn der Näherungswert, den sie für I liefert, kann aus demjenigen, welchen die Trapezregel gibt, durch zwei sehr einfache Verbesserungen gewonnen werden; überdies ist sie ebenso für gerade wie für ungerade n brauchbar. Verf. gibt noch zwei Formeln mit leichten Abweichungen, die in Sonderfällen anwendbar sind.

L. Beretta (Firenze).

Afendik, L. G.: Error evaluation in numerical integration after Störmer. Appl. Math. a. Mech., N. s. 1, 557—561 u. engl. Zusammenfassung 562 (1938) [Russisch].

Verf. gibt eine Genauigkeitsschätzung für die Integration von $y'' = f(x, y)$ nach dem Verfahren von Störmer. Die Störmersche Hauptformel entsteht, wenn man die zweite Differenz $\Delta^2 y(x_n)$ als Integral über $\eta(x) = h^2 f[x, y(x)]$ [h = Spanne, $y(x)$ = Lösung] schreibt und $\eta(x)$ durch ein Newtonsches Interpolationspolynom η_x mit gleichabständigen Interpolationsstellen ersetzt. Berücksichtigung des Restgliedes der Newtonschen Interpolation liefert die Möglichkeit einer Abschätzung des Unterschiedes $R_{n+2,k}$ zwischen $\Delta^2 y(x_n)$ und seinem Störmerschen Näherungswert. Durch Rekursion lassen sich damit dann auch die Fehler $\varepsilon(x_i)$ der Störmerordinaten gegen die richtigen Ordinaten abschätzen.

Theodor Zech (Darmstadt).

Kravčuk, M.: Sur la distribution des abscisses des quadratures mécaniques du type Gauss. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 57—61 u. franz. Zusammenfassung 62 (1938) [Russisch].

Bei nichtnegativer, nichtabnehmender, sonst willkürlicher Funktion $P(x)$ werden Polynome $\omega_n(x) = x^n + a_1^{(n)} x^{n-1} + \dots$ durch Verschwinden ihrer Momente

$$\int_{-1}^{+1} x^k \omega_n(x) \frac{dP(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

erklärt. Mittels einer Integralungleichung wird, falls $\frac{dP(x)}{\sqrt{1-x^2} dx}$ beschränkt, für den Abstand der größten Wurzel von $\omega_n(x)$ vom oberen Intervallende 1 bei wachsendem n das asymptotische Verhalten $O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)$ festgestellt.

Theodor Zech (Darmstadt).

Bartky, Walter: Numerical calculation of a generalized complete elliptic integral. Rev. Modern Physics 10, 264—269 (1938).

Si dà un metodo per il calcolo numerico dell'integrale:

$$I(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(R) d\varphi}{R}, \quad R^2 = m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi$$

dove $F(R)$ è una qualsivoglia funzione continua ed m, n sono due numeri reali, positivi ($m \geq n$). Gli integrali ellittici completi delle tre specie, nella forma canonica di

Legendre, appartengono a questo tipo. Con l'uso iterato della trasformazione di Landen si trova:

$$I(m, n) = I_i(m_i, n_i) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_i(R_i) d\varphi_i}{R_i}, \quad R_i^2 = m_i^2 \cos^2 \varphi_i + n_i^2 \sin^2 \varphi_i$$

dove la F_i è in semplice relazione con la F_{i-1} ed m_i, n_i sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di m_{i-1}, n_{i-1} . Passando al limite per $i \rightarrow \infty$ viene:

$$I(m, n) = \frac{\pi}{2m_L} \lim_{i \rightarrow \infty} F_i(m_L)$$

essendo m_L la media aritmetico-geometrica di m, n definita da Lagrange, Gauss, Legendre ecc. Per il calcolo numerico, tenuto conto della rapida convergenza delle m_i, n_i verso m_L , è sufficiente in molti casi applicare la trasformazione di Landen tre o quattro volte. L'autore dà una tavola numerica che permette il calcolo dell'integrale predetto, approssimato mediante la formula:

$$I(m, n) = \frac{\pi}{2m_3} F_3(m_3),$$

per $m = 1$ ed n variabile tra 0,1 ed 1,0. Viene inoltre sviluppato qualche esempio di interesse fisico.

Conforto (Roma).

Gupta, Harish Chandra: The flow of a viscous fluid past a circular cylinder. Philos. Mag., VII. s. 26, 1085—1109 (1938).

Bei der Bewegung einer zähen Flüssigkeit um einen Widerstandskörper wird das Geschwindigkeitsfeld durch die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen beschrieben. Einleitend werden 2 Lösungsverfahren für diese Gleichungen angeführt: 1. graphisches Lösungsverfahren von Falkner und Skan (s. dies. Zbl. 3, 174); 2. Methode von Green: Die Tangentialgeschwindigkeit wird nach Dimensionslosmachen der Variablen durch eine Reihe nach Potenzen des Wandabstandes ausgedrückt. Allerdings divergiert diese Potenzreihe für Wandabstände von der Größenordnung der Grenzschichtdicke. In der vorliegenden Arbeit werden die Grenzschichtgleichungen durch eine neue Methode, eine numerische Approximation, gelöst (für Potentialströmung). Verf. geht davon aus, daß die Lösung bis zu einem bestimmten Punkt längs der Zylinderoberfläche bekannt ist, und erhält dann für den folgenden Punkt durch Extrapolation einen Näherungswert. Für die Einkreisung des wahren Wertes bestehen einfache Kontrollmöglichkeiten. Die Übereinstimmung der so berechneten Tangentialgeschwindigkeiten mit dem Experiment, die durch mehrere Beispiele belegt wird, ist sehr gut. E. Estel (Leipzig).

Geometrie.

Allgemeines:

Comessatti, Annibale: La produzione geometrica italiana, nell'anno XV E. F. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) Atti Soc. ital. Progr. Sci. 2, 47—56 (1938).

Chapman, S., and E. A. Milne: The proof of the formula for the vector triple product. Math. Gaz. 23, 35—38 (1939).

● **Rüegg, J. H.:** Die Merkwürdigkeiten beim Dreieck. Zusammenstellung der konstruktiven Punkte des Dreieckes mit Einschluß der sogenannten „merkwürdigen Punkte“. Zürich: 1938. 16 S.

In einer großen Figur, der ein stumpfwinkliges Dreieck zugrunde liegt, stellt Verf. eine große Anzahl merkwürdiger Punkte zeichnerisch zusammen. Im Text werden 79 bezügliche Sätze (ohne Beweise) angegeben. O. Bottema (Deventer, Niederlande).

Rössler, Fred: Über Konstruktionsprinzipie für die Konstruktion von Helligkeitsgleichen an besonderen Flächenarten. Mh. Math. Phys. 47, 139—147 (1938).

In einer früheren Arbeit (Mh. Math. Phys. 46, 157—171; s. dies. Zbl. 17, 320) hat der Verf., ausgehend von einer neuen Helligkeitsdefinition $\mathfrak{h} = \frac{C \cos \lambda}{2 - \cos \sigma}$, worin

λ und σ die Winkel des einfallenden Lichtstrahls und des Sehstrahles gegen die Flächennormale bedeuten, die Theorie und die Grundzüge der Konstruktion der Flächenkurven gleicher Helligkeit, die der Verf. Isophanen nennt, entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen fortgesetzt. Behandelt werden die Isophanen der Flächen 2. O., insbesondere der Drehflächen 2. O. und besonders eingehend die Isophanen der Schraubflächen. Von besonderem Interesse ist die Konstruktion der Isophanen der Regelschraubflächen, die sich aus einem bestimmten System von Kegelschnitten auch durch Mechanismen ableiten lassen. *Kruppa.*

Menger, Karl: Non-euclidean geometry of joining and intersecting. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 821—824 (1938).

Projective geometry can be based on assumptions concerning two operations of joining and intersection as the algebra of numbers may be based on assumptions concerning two operations of adding and multiplying. An "algebraic" treatment of geometry in this sense is not only possible for projective and affine geometry (see this Zbl. 14, 76), but also for non-euclidean geometry. The classical way of introducing parallelism in the hyperbolic plane is based on the concept of angular sector and presupposes linear order. It is possible however to introduce parallelism in terms of joining and intersecting only. If P is not on the line l , then the pairs of parallels to l through P , say l' and l'' , is the only pair of lines through P which has the properties that l' and l'' do not intersect l and that any line intersecting l intersects at least one of the lines l' and l'' . Two points P' and P'' lie on the same side or on different sides of l , according to whether the parallels to l through P' and P'' do or do not intersect. The segment of a line, the interior of a triangle etc. can be defined in the same way.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Menger, Karl: A new foundation of non-Euclidean, affine, real projective and Euclidean geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 486—490 (1938).

The methods of the author's recent note (this Zbl. 19, 363) are extended so as to yield bases for affine, real projective, Euclidean and non-Euclidean geometry (not necessarily Bolyai-Lobachevskian) in terms of "joining" and "intersecting" as the only undefined relations.

J. L. Dorroh (Arkadelphia).

Analytische und algebraische Geometrie:

Todd, J. A.: Correspondences in projective geometry. Math. Gaz. 23, 58—61 (1939).

Sind x, y Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe, so wird jede $(1,1)$ -Korrespondenz zwischen diesen durch eine Projektivität, d. h. eine bilineare Gleichung in x, y bzw. eine beliebige Potenz einer solchen ausgedrückt. Für diesen vielbenutzten Satz gibt Verf. einen elementaren, rein algebraischen Beweis, den er dann auf den analogen Satz erweitert, daß eine (α, β) -Korrespondenz durch eine Gleichung α -ten Grades in x und β -ten Grades in y bzw. eine Potenz davon bestimmt wird. *Harald Geppert.*

Gambier, Bertrand: Sur une configuration de trois coniques. I. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 765—780 (1938).

Es werden 3 Kegelschnitte Q, Q_1, Q_2 betrachtet. Wenn ein in Q_1 eingeschriebenes und zur reziproken Polare q von Q in bezug auf Q_2 umschriebenes Dreieck T existiert, ist die Gleichung $K = 0$ erfüllt (K simult. Invariante von Q, Q_1, Q_2): dann gibt es ∞^1 Dreiecke wie T . Wenn außerdem Q und Q_1 harmonisch zu Q_2 umschrieben sind, erhält man insgesamt ein System von 3 Gleichungen: das gibt die Bedingung für die Existenz eines in Q und Q_1 eingeschriebenen und in bezug auf Q_2 konjugierten Dreiecks T . Ferner wird der Sonderfall studiert, daß jeder der 3 Kegelschnitte zu den anderen harmonisch umschrieben und eingeschrieben ist. *P. Buzano* (Torino).

Deaux, R.: Sur les coniques réelles inscrites dans un quadrilatère réel. Mathesis 52, 283—289 (1938).

Mediante un ragionamento sintetico, condotto con i metodi della geometria proiettiva pura, si perviene a dimostrare che le coniche reali, tangenti a quattro rette

reali e distinte, si ripartiscono in tre famiglie situate rispettivamente in tre regioni del piano proiettivo, pienamente individuate dalle quattro tangenti. Due coniche della schiera si incontrano in quattro o in nessun punto reale a seconda che appartengano o no alla stessa famiglia. L'autore dimostra qualche altra proposizione relativa alla detta configurazione ed infine enuncia i teoremi duali. *Conforto (Roma).*

Barbilian, D.: Einige geometrische Anwendungen der Invarianten von Boole. *Gaz. mat.* 44, 283—287 (1939) [Rumänisch].

Es handelt sich um einige elementare Aufgaben aus dem praktischen Übungsseminar des Ref. — Eine biquadratische Binärform hat bekanntlich dann und nur dann eine dreifache Wurzel, wenn ihre beiden Boole-Weierstraßschen Invarianten g_2, g_3 verschwinden. Da g_2 quadratisch ist, erhalten gewisse Sätze aus der analytischen Geometrie auf diesem Wege eine fast intuitive Lösung (z. B.: 1. Die sechs Wendetangenten einer rationalen ebenen C_4 berühren eine C_2 . 2. Die Schmiegungebenen einer C_4 zweiter Art aus R_3 berühren eine M_2^2). — Weiter wird noch folgende Anwendung des erwähnten Ansatzes gebracht: Es sei E die Evolute eines Kegelschnittes C_2 von dem Zentrum O und Ω jener Kegelschnitt, der durch beide im Unendlichen liegende Rückkehrpunkte von E läuft und außerdem E viermal berührt. Ein an Ω doppeltangierender Kegelschnitt schneidet E nach zwei rationalbekannten Gruppierungen von sechs Punkten M_i und N_i ($i = 1, \dots, 6$). Die sechs Schmiegungekreise von C_2 mit den Zentren M_i bzw. N_i haben einen gemeinsamen Orthogonalkreis M bzw. N . Die Zentren von M und N liegen in bezug auf O symmetrisch. Übrigens besteht zwischen den Potenzen μ und ν von O gegenüber M und N die Gleichung $\mu + \nu = a^2 + b^2$, wobei a, b die Hälfte der Hauptdurchmesser von C_2 bedeuten. *Autoreferat.*

Das Gupta, P. N., and N. Chatterjee: On the reciprocal linear complexes of the system of linear complexes obtained from two quaternary quadrics associated with two linear complexes. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 30, 31—34 (1938).

Gibt in symbolischer Schreibweise ein irreduzibles System von reziproken linearen Komplexen der genannten Art. *Bodewig (Scheveningen).*

Jacobson, N.: Normal semi-linear transformations. *Amer. J. Math.* 61, 45—58 (1939).

Verf. betrachtet einen n -dimensionalen Vektorraum über einem Körper K . K enthalte einen involutorischen Automorphismus $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ mit $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$. Es sei eine Form $f = (x, y)$ gegeben, welche linear in \bar{x} und \bar{y} ist. A sei die Matrix der Koeffizienten. Es wird vorausgesetzt, daß f definit ist, d. h. daß (x, x) nur verschwindet für $x = 0$. Zwei Vektoren heißen orthogonal für $(x, y) = 0$. Verf. betrachtet nun halblinare Transformationen T , die zu einem bestimmten Automorphismus S gehören, und definiert die zu T konjugierte Transformation T^* . Die Matrix von T^* wird aus der Matrix von T und A erhalten. T^* ist eine halblinare Transformation mit Automorphismus \bar{S}^{-1} . T wird normal genannt, wenn $T^*T = TT^*$ ist. Verf. beweist, daß jede normale halblinare Transformation vollständig reduzierbar ist und in speziellen Fällen auch orthogonal vollständig reduzierbar ist: Wenn nämlich $T^* = \pm T$ oder $T^*T = 1$ ist oder auch wenn K besondere Eigenschaften hat. Die Resultate werden in der projektiven Geometrie gedeutet. *J. Haantjes (Amsterdam).*

Chisini, Oscar: Breve dimostrazione di un teorema su la hessiana. *Ist. Lombardo, Rend., III. s.* 71, 219—221 (1938).

Verf. gibt einen sehr kurzen Beweis dafür, daß eine ebene algebraische Kurve C , deren Hessesche Form identisch verschwindet, aus lauter Geraden eines Büschels zusammengesetzt ist. Man schließt, daß 1. C ganz in Geraden zerfällt, weil andernfalls jede nichtgerade i -fache Komponente in die Hessesche Kurve H höchstens $3i - 3$ -fach eingeht; 2. ein r -facher Punkt von C für H die Vielfachheit $3r - 4$ hat, die sich nur dann erhöhen kann, wenn alle seine Tangenten zusammenfallen, woraus die Behauptung durch indirekten Schluß folgt. *Harald Geppert (Gießen).*

Muhly, H. T., and O. Zariski: The resolution of singularities of an algebraic curve. Amer. J. Math. 61, 107—114 (1939).

Neue Beweise für die Möglichkeit der birationalen Transformation einer algebraischen Kurve in eine singularitätenfreie Raumkurve des projektiven S_3 oder auch in eine ebene Kurve, deren Singularitäten nur Doppelpunkte mit getrennten Tangenten sind. Die Beweise fußen auf der Dedekind-Weberschen arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. *van der Waerden* (Leipzig).

Biggiogero, G.: Sulla risoluzione delle equazioni algebriche in due variabili. Rend. Semin. mat. fis. Milano 11, 147—167 (1937).

Eine sehr gedrängte Übersicht über die wichtigsten Punkte der Theorie der algebraischen Kurven und Funktionen: Lineare Scharen, adjungierte Kurven, kanonische Schar, Abelsche Integrale, Abelsches Theorem, Umkehrproblem und Thetafunktionen vom Gesichtspunkt der Bestimmung der Punkte x, y einer algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$. *Deuring* (Jena).

Haarbleicher, André: Faisceaux linéaires de courbes des trois barres ayant mêmes points doubles. J. École polytechn., III. s. 145, 1—31 (1939).

Eine Trimochloide läßt sich in die ebenen Kurven sechster Ordnung vom Geschlecht 1 einordnen, die in den absoluten Punkten der Ebene zwei 3fache Punkte und im Endlichen drei andere Doppelpunkte Q_1, Q_2, Q_3 besitzen. Sie ist vollständig gekennzeichnet durch die Forderung, daß sich die drei Doppelbrennpunkte F_1, F_2, F_3 auf demselben Kreis wie Q_1, Q_2, Q_3 befinden. — Die Trimochloiden (\mathcal{C}) mit festen Q_1, Q_2, Q_3 bilden ein lineares ∞^3 -Kurvensystem. Die meisten in dieser Arbeit besprochenen Eigentümlichkeiten der Trimochloiden entstehen aus der Möglichkeit einer linearen Abbildung des Systems (\mathcal{C}) auf das System (\mathcal{Q}) der Kreise und Geraden der Ebene. Die Abbildung wird durch folgenden Satz ermittelt: Es sei q ein dem Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ eingeschriebener Kegelschnitt, ω der über einem Hauptdurchmesser von q beschriebene Kreis, P_1, P_2 die auf dem anderen Hauptdurchmesser befindlichen Brennpunkte und Ω ein Kreis. Der geometrische Ort der Brennpunkte P_1, P_2 , für die der Kreis ω den zugrunde gelegten Kreis Ω bei festen Q_1, Q_2, Q_3 orthogonal schneidet, ist eine Trimochloide \mathcal{C} mit den Doppelpunkten Q_1, Q_2, Q_3 . — Eine Trimochloide gestattet eine mechanische Erzeugung. Für jedes Paar F_1F_2 von Doppelbrennpunkten läßt sich ein Viereck $F_1F_2M_1M_2$ und auf M_1M_2 ein fester Punkt P bestimmen, so daß der Punkt P bei Festlegung von F_1, F_2 die gegebene Trimochloide beschreibt. — Die Arbeit enthält eine ausführliche Untersuchung des ebenfalls linearen, das System (\mathcal{C}) begleitenden Kubiksystems, das vermöge des zweiten Brennpunktpaares P'_1, P'_2 von q definiert wird. *D. Barbilian* (București).

Kadeřávek, Frant.: Sur une surface Steinerienne du 4°. Sonderdruck aus: Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême 1938, 1—7 u. franz. Zusammenfassung 7 [Tschechisch].

Als die durch eine Ebene π und eine Richtung S bestimmte Summe η zweier Flächen ${}^1\eta, {}^2\eta$ wird der Ort des Punktes a bezeichnet, der auf einer in der Richtung S gehenden Geraden liegt und zu den Schnittpunkten ${}^0a, {}^1a, {}^2a$ der Geraden mit $\pi, {}^1\eta, {}^2\eta$ in folgender Beziehung steht: ${}^0aa = {}^0a{}^1a + {}^0a{}^2a$. In der vorliegenden Arbeit wird die Summe η zweier Rotationskegel ${}^1\eta, {}^2\eta$ betrachtet. Die gegenseitige Lage von ${}^1\eta, {}^2\eta$ ist durch ein gleichseitiges Dreieck uvw bestimmt, und zwar so, daß v, w die Scheitel und uv, uw Orthogonalprojektionen der Basiskreise der beiden Kegel darstellen. Als π wird die Ebene des Dreieckes und als S die dazu normale Richtung gewählt. Es zeigt sich, daß η ein Sonderfall der Steinerschen Fläche ist und aus der Konstruktion läßt sich eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften der Fläche elementar beweisen. *O. Borůvka* (Brünn).

Hollcroft, T. R.: The maximum number of distinct contacts of two algebraic surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 158—163 (1939).

Zerfällt die Schnittkurve C zweier algebraischer Flächen F_μ, F_ν der Ordnungen μ, ν in α irreduzible Komponenten und haben F_μ, F_ν keine singulären Punkte gemein,

so ist die Höchstzahl unterschiedener Berührungspunkte von F_μ und F_ν gleich $T = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + \alpha$; sie ist also unabhängig von den Charakteren der Schnittkurve C . Besteht diese aus lauter Geraden ($\alpha = \mu\nu$), so ist die Zahl der Berührungspunkte gleich $T = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 2)$. Jeder gemeinsame singuläre Punkt, der für F_μ bzw. F_ν die Vielfachheiten r, s hat, erniedrigt, falls er nicht Schnittpunkt zweier Komponenten von C ist, T um den Betrag $\frac{1}{2}rs(r + s - 2)$, und falls sich in ihm genau zwei Komponenten von C schneiden, um $\frac{1}{2}rs(rs - 1)$. Weiter untersucht die Arbeit den Einfluß von Berührungskurven oder gemeinsamen mehrfachen Kurven auf T .

Harald Geppert (Gießen).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation. Ann. École norm., III. s. 55, 193—222 (1938).

Sia F una superficie algebrica contenente un'involuzione ciclica I_p , d'ordine primo, avente un numero finito di punti uniti; e Φ una superficie, proiettivamente definita, i cui punti corrispondono birazionalmente ai gruppi di I_p . Se ad un punto unito, A , di I_p sulla F corrisponde sulla Φ un punto, A' , questo risulta multiplo. L'autore si propone di studiare la struttura di A' ed a questo scopo considera il sistema lineare $|C_1|$, costituito dalle curve, unite per I_p , che sulla F corrispondono alle sezioni piane della Φ ; ed, in particolare, il sistema $|C'_1|$ delle curve di $|C_1|$ passanti per A . La struttura di A' può determinarsi studiando la molteplicità di $|C'_1|$ in A e considerando i sistemi lineari, subordinati a $|C'_1|$, che in A hanno molteplicità più elevata che $|C'_1|$; questi ultimi sistemi danno luogo a punti multipli infinitamente vicini ad A' . L'autore studia in particolare come deve essere costituito il sistema $|C'_1|$ perchè il punto A' di Φ sia di molteplicità $n_1 + n_2$, il cono tangente decomponendosi in due coni razionali, d'ordine n_1, n_2 , aventi una generatrice semplice in comune. In conseguenza del comportamento di $|C'_1|$ in A , si trova allora che dal punto A' esce una successione di punti doppi biplanari, che termina con un punto doppio biplanare ordinario o con un punto doppio conico. L'autore illustra questo caso sopra un esempio nel quale la F è il piano, la I_p l'omografia:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3 \quad \begin{matrix} 2\pi i \\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}} \end{matrix}$$

ed il sistema $|C'_1|$ è il sistema delle curve d'ordine p , unite per l'anzidetta omografia e passanti per $A(1, 0, 0)$. Se invece la I_p è data da:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^9 x_3 \quad \begin{matrix} 2\pi i \\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{23}} \end{matrix}$$

si è in un caso diverso, nel quale il cono tangente nel punto A' , corrispondente ad $A(1, 0, 0)$, si scinde in tre parti.

Conforto (Roma).

Turri, T.: Ancora sui gruppi lineari di omografie razionali, i quali non lasciano fisso alcuno spazio razionale. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 83—87 (1938).

Turri, T.: Sui sistemi lineari di reciprocità razionali da cui derivano gruppi di omografie, i quali non lasciano fisso alcuno spazio razionale. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 126—130 (1938).

Turri, T.: I gruppi di moltiplicabilità delle matrici di Riemann. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 169—196 (1938).

Turri, T.: Sulla classificazione delle superficie iperellittiche di rango 1. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 35—36 (1939).

Verf. betrachtet das Problem, das auch in einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 19, 54) behandelt wurde, die Struktur der (nach Scorza, Rend. Circ. mat. Palermo 41, 1916, erklärten) Multiplikabilitätsgruppe einer Riemannschen Matrix, die frei von isolierten Achsen ist, zu bestimmen. Das Hilfsmittel ist, auch hier, die Untersuchung, wie ein prinzipiales Nullsystem auf die Schar der bei der Gruppe invarianten Teilräume wirkt. Die Resultate der zitierten Abhandlung werden vervollständigt, indem ein neuer Typus angegeben wird, auf welchen sich die Multiplikabilitätsgruppe reduzieren kann; dies verändert jedoch nicht einen früheren Schluß des Verf., nach welchem der Realitätscharakter der Pseudoachsen einer Riemannschen Matrix nur die Werte 1

oder 2, aber nie den Wert 4, wie Rosati glaubte, haben kann. Dagegen fällt der Schluß des Verf. (dies. Zbl. 17, 419), nach welchem der Typus VII der hyperelliptischen Flächen ersten Ranges in der Klassifikation Scorzas (Rend. Circ. mat. Palermo 41, 1916) nicht möglich wäre: solche Flächen entsprechen gerade dem Typus der Multiplikabilitätsgruppe, der dem Verf. entgangen war. Es existierten also Flächen vom Typus VII, während der entsprechende Typus bei den Kurven des Geschlechtes 2 nicht vorkommen kann; dies hat seinen Grund darin, daß die Tabelle der Normalperioden einer hyperelliptischen Fläche allgemeiner ist als die Tabelle der Normalperioden einer Kurves des Geschlechtes 2. Conforto (Rom).

Togliatti, Eugenio G.: Ancora sulle forme cubiche dello spazio a 5 dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 254—258 (1938).

Dans cette Note l'Auteur apporte diverses simplifications et additions à son travail antérieur sur le même sujet (ce Zbl. 16, 221). P. Dubreil (Nancy).

Burniat, Pol: Note sur certaines variétés de Segre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 690—692 (1938).

L'Auteur démontre que la variété \bar{V}_3^6 de S_7 considérée par lui dans une Note antérieure (Bull. Sci. math., II. s. 60, 171—180; ce Zbl. 14, 365) est la variété de Segre V_3^6 . Ce fait lui a été suggéré par une remarque de L. Godeaux, concernant les sections de cette variété par les hyperquadriques de S_7 . P. Dubreil (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur la construction de variétés algébriques analogues à la surface d'Enriques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 2—7 (1939).

Eine Verallgemeinerung der Flächen von F. Enriques mit $p_a = p_g = 0$ und $P_2 = 1$. Sie besteht aus einer V_{2n} , die folgenden Bedingungen genügt: 1. Auf V_{2n} fällt jedes Linearsystem von V_{2n-1} mit seinem adjungierten Linearsystem zusammen; 2. das charakteristische System eines Linearsystems ist vollständig; 3. auf jeder V_{2n-1} von V_{2n} wird eine V_{2n-2} von den adjungierten V_{2n-2} in einem vollständigen Linearsystem geschnitten; 4. V_{2n} enthält eine zyklische fixpunktfreie Involution I_p einer Primzahlordnung p . Das Bild Φ_{2n} einer solchen I_p besitzt keine kanonische Φ_{2n-1} , sie besitzt aber eine bikanonische Φ_{2n-1} der Ordnung Null; außerdem ist es $p = 2$. Eine V_{2n+1} , die denselben Bedingungen genügt, führt zu einer Φ_{2n+1} mit kanonischen und mehrkanonischen Φ_{2n} alle der Ordnung Null. Es folgen zwei Beispiele.

E. G. Togliatti (Genova).

Jung, Heinrich W. E.: Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen. J. reine angew. Math. 180, 97—109 (1939).

L'auteur démontre, en utilisant la théorie arithmétique de la géométrie algébrique développée dans ses travaux antérieurs, que toute transformation birationnelle du plan est le produit d'un nombre fini de transformations des types:

$$\text{I. } x' = y, \quad y' = x, \quad (\text{Vertauschungstranf.})$$

$$\text{II. } x' = x, \quad y' = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy}. \quad (\text{Fundamentaltransf.}).$$

L. Godeaux (Liège).

Godeaux, Lucien: Sur une propriété de certains systèmes linéaires triplement infinis de surfaces. Rev. Ci., Lima 40, 457—463 (1938).

Im S_3 werde ein Paar von Flächen der Ordnung $2n - 2$ gebildet, die zwei windschiefe Geraden r_1, r_2 mit den Vielfachheiten n und $n - 3$ enthalten, und ein eben-solches Paar, das in r_1, r_2 die Vielfachheiten $n - 3, n$ hat. Diese vier Flächen gehören einem dreidimensionalen linearen System Σ an. Durch einen beliebigen Punkt P des S_3 geht eine Treffgerade g zu r_1, r_2 ; auf ihr schneiden die durch P gehenden Flächen von Σ eine Linearschar g_3^2 aus; deren drei dreifache Punkte sind die Treffpunkte R_1, R_2 mit r_1, r_2 und ein weiterer Punkt P' . So entsteht eine involutorische Cremonatransformation $P \leftrightarrow P'$ des S_3 ; da $(R_1 R_2 P P') = -1$ ist, so fällt sie mit der harmonischen Homographie mit den Achsen r_1, r_2 zusammen. Bildet man die

Gruppen der von Σ auf g ausgeschnittenen g_1^2 auf die Ebenenschnitte einer rationalen C_4 des S_3 ab, so entsprechen den R_1, R_2 auf C_4 zwei Wendepunkte R'_1, R'_2 derart, daß jede Ebene durch R'_1, R'_2 die C_4 in zwei weiteren, zu R_1, R_2 harmonischen Punkten schneidet.

Harald Geppert (Gießen).

Rozet, O.: Sur une transformation birationnelle involutive. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 12—19 (1939).

Etude d'une transformation birationnelle involutive d'un espace S_R à $R = \frac{1}{2}(r-1)(r+2)$ dimensions ($r \geq 2$), qui généralise la transformation étudiée par A. R. Williams [Bull. Amer. Math. Soc. 44, 272—278 (1938); ce Zbl. 18, 272].

P. Dubreil (Nancy).

Golifman, Roger: Sur quelques transformations birationnelles de l'espace. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 7, 542—549 (1938).

Etude de deux transformations birationnelles de l'espace. Bornons-nous à reproduire ici la définition de la première: un réseau $|F|$ de surfaces F d'ordre n a une droite (r) multiple d'ordre ν et une droite (s) multiple d'ordre $n - \nu - 3$, ces deux droites ne se rencontrant pas. Ce réseau contient un faisceau $|F_0|$ de surfaces ayant la droite (r) multiple d'ordre $\nu + 2$. Deux points y et z se correspondent dans la transformation considérée si la droite yz s'appuie sur (r) et (s) et s'il existe une surface F passant par y et z et tangente en y à la droite uz .

P. Dubreil (Nancy).

Differentialgeometrie:

Yü, Chieh-Fan: On the vertices of an oval. Math. Ann. 116, 571—573 (1939).

Entwickelt man den Krümmungsradius ρ einer Eilinie E in eine Fourierreihe nach dem Stützwinkel φ und verschwinden in dieser alle Koeffizienten von $\cos \mu \varphi$ und $\sin \mu \varphi$ ($\mu = 1, \dots, n$), so heißt E von n -ter Klasse. Ist L die Länge von E , so soll jedes Maximum (Minimum) von ρ , das größer (kleiner) als $\frac{1}{2\pi} L$ ist, primär heißen. Ähnlich wie man den Vierscheitelsatz beweist, zeigt Verf.: Eine Eilinie der Klasse n hat mindestens $2n + 2$ primäre Scheitel und mindestens $2n + 2$ Punkte, in denen $\rho = \frac{1}{2\pi} L$ ist.

Harald Geppert (Gießen).

Goormaghtigh, R.: Un théorème général sur les centres de courbure successifs de l'arcuide d'une courbe plane. Mathesis 53, 14—17 (1939).

Auf einer ebenen Kurve C gehöre zum Punkte M die Bogenlänge s ; trägt man auf der x -Achse $OP = s$ ab und legt durch P die Parallele n zur Normalen von C in M , so hüllen die n eine Arcuide N von C ein. μ, μ_1, μ_2, \dots sei die Folge der Krümmungszentren von C in M ; bewegt man ihre Konfiguration so lange, bis M auf P und die positive Halbtangente von M auf die positive x -Achse fällt, so gehen sie in π, π_1, π_2, \dots über. Verf. beweist den Satz: Der Schwerpunkt der in den Punkten $P, \pi, \dots, \pi_i, \dots, \pi_m$ liegenden Massen $1 - \binom{m+1}{1}; \binom{m+1}{1} - \binom{m+1}{2}; \dots; \binom{m+1}{i+1} - \binom{m+1}{i+2}; \dots; \binom{m+1}{m+1}$ liegt auf der durch das m -te Krümmungszentrum von N gelegten Normalen der m -ten Evoluten von N . Dieser Satz ermöglicht eine schrittweise Konstruktion der Folge der Krümmungszentren der Arcuide. *Harald Geppert*.

Kasner, Edward, and John de Cicco: Curvature element transformations which preserve integrable fields. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 104—111 (1939).

A curvature element [of a (xy) -plane] is given by the four numbers $x, y, p \equiv \frac{dy}{dx}, q \equiv \frac{dp}{dx}$. A set of ∞^1 curvature elements $y = y(x), p = p(x), q = q(x)$ (where y, p, q are arbitrary functions of x only) with $dy - p dx = 0, dp - q dx = 0$ is called an union. A collection of ∞^2 curvature elements is said to be a field. A field $p \equiv p(x, y), q \equiv q(x, y)$ (where p, q are functions of x, y only) is termed an integrable field if and only if $q = p_x + pp_y$. The problem of this paper is to find the group of curvature element

transformations which carry every integrable field into an integrable field. The authors show that the group with the property even mentioned is the group of extended contact transformations of lineal elements. *Hlavatý (Praha).*

Knoll, Maria: Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien und Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien. Würzburg: Diss. 1938. 35 S.

Die Arbeit behandelt 1. die Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien, die also zugleich Schattengrenzen sind. Diese sind sämtlich kongruent, und die Flächen gehören zu den allgemeinen Mongeschen Gesimsflächen; 2. die Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien; zu ihnen gehören außer den vorangehenden die allgemeinen Schraubenflächen und weitere Typen von Gesims- und Röhrenflächen, die genau angegeben werden. Die Ergebnisse sind bekannt. *Geppert.*

Lense, Josef: Über isotrope Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **116**, 297—309 (1939).

Una varietà ad m dimensioni V_m di uno spazio euclideo R_n si dice isotropa di specie k quando sono nulli i moduli dei vettori derivati d'ordine $\leq k$ su tutte le sue curve, ma non quelli d'ordine $k+1$. Questi si annullano per particolari sistemi di curve, isotrope di specie $k+1$, definite da un'equazione differenziale del primo ordine e di grado $2k+2$. Le condizioni metriche per l'isotropia, quando n sia inferiore ad un determinato valore (dipendente da m e da k) danno luogo a condizioni proiettive riguardanti le dimensioni degli spazi osculatori a V_m (e quindi all'esistenza di curve proiettivamente specializzate su V_m) (E. Bompiani, questo Zbl. **11**, 418). — L'A. si occupa del caso $m=2$, $k=1$ [cfr. anche Lense, questo Zbl. **13**, 34, 365; Pinl, questo Zbl. **15**, 415; e Compositio Math. **5**, 208—238 (1937), questo Zbl. **18**, 171]. Le V_2 isotrope di prima specie si dividono in cinque tipi (Pinl, Compositio Math.) secondo che su di esse le linee isotrope di 2^a specie formano: I. un solo sistema (quadruplo); II. un sistema triplo e uno semplice; III. due sistemi doppi; IV. un sistema doppio e due semplici; V. quattro sistemi semplici. — In R_6 esistono V_2 dei tipi I, II, V che sono rispettivamente rigate sviluppabili, rigate non sviluppabili, superficie con un doppio sistema coniugato. — L'A. cerca i tipi esistenti in R_7 . Occorre esaminare le dimensioni degli spazi osculatori a V_2 del 2° e del 3° ordine, e le linee quasi-asintotiche $\gamma_{2,3}$ (lo spazio osculatore del 3° ordine alla curva in un punto è contenuto nello spazio osculatore del 2° ordine alla superficie nel punto). Si trova che in R_7 appartengono al tipo I le superficie già elencate in R_6 ; al tipo II le rigate; al tipo III superficie con due sistemi di $\gamma_{2,3}$; al tipo IV superficie con un sistema di $\gamma_{2,3}$; al tipo V o superficie con un doppio sistema coniugato o (caso generale) senza quasi-asintotiche. — Segue un teorema sulla dimensione n degli spazi contenenti V_m isotrope dipendenti da funzioni arbitrarie $\left(n > \frac{m(m+3)}{2}\right)$. *E. Bompiani (Roma).*

Lukehin, V.: Sur la déformation des surfaces de rotation fermées et ouvertes à courbure négative avec les arêtes circulaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **20**, 521—524 (1938).

Anschließend an eine frühere Note (dies. Zbl. **19**, 81) untersucht Verf. die infinitesimalen Verbiegungen einer Drehfläche negativen Krümmungsmaßes vom Spindel- oder Wulsttyp. Besitzt eine solche geschlossene Fläche zwei konische Punkte A, B auf der Drehachse und dazwischen einen Breitenkreis in $z=0$ als Rückkehrkante, so tritt bei einer A, B festhaltenden Verbiegung zu $r(z)$ ein additiver Term $t \cdot R(z, v)$ (t = Verbiegungsparameter, v = Drehwinkel) hinzu, dessen Fourierkoeffizienten nach v einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in z genügen und für $z=0$ gewissen Randbedingungen unterworfen sind. Die Eigenwerte dieser Aufgabe hängen mit den Werten a, b von $\frac{dr}{dz}$ in A, B zusammen. Es gibt also in einer von a, b abhängenden Familie solcher Flächen stets solche, die nicht in der angegebenen Weise verbiegbar sind. Im Falle der Symmetrie um $z=0$ können nur Verbiegungen vorkommen, bei denen

die Rückkehrkante entweder auf einem Zylinder parallel zur Achse oder in der Ebene $z = 0$ verrückt wird. Ähnliche Aussagen lassen sich für offene Flächen machen.

Harald Geppert (Gießen).

Bompiani, Enrico: *Statica grafica e geometria proiettivo-differenziale.* (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 296—299 (1938).

Die Konstruktion einer Seillinie Z eines ebenen Kräftesystems fordert eine Integration: Wenn es sich um parallele Kräfte handelt, können alle anderen Seillinien mittels einer ebenen homologen Affinität erhalten werden. Für allgemeine Kräftesysteme in einer Ebene π können die ∞^3 Seillinien nur durch eine räumliche Konstruktion erreicht werden: Man projiziert die Einhüllende der Kraftlinien von einem beliebigen Punkt V und betrachtet auf dem so entstehenden Kegel eine Kurve, dessen entsprechende Torse T die Seillinie Z enthalten soll; die ∞^3 speziellen Homologien mit Zentrum V transformieren T in ∞^3 Torsen, welche die Seillinien in π ausschneiden.

P. Buzano (Torino).

Takasu, Tsurusaburo: *Eine konformgeometrische Verallgemeinerung der geodätischen Linien.* II. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 342 (1938).

Das Resultat der ersten Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 20, 72) wird hier durch die Bemerkung ergänzt, daß dann und nur dann die extremalen Kurven Kreise sind und $\varrho \neq \text{konst.}$, wenn die Schar der benachbarten Kurven geeignet beschränkt wird.

O. Borůvka (Brünn).

Hilton, Harold: *On some properties of rectilinear congruences.* Ann. of Math., II. s. 40, 48—57 (1939).

Consider a director surface $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, whose fundamental forms are $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$, and a rectilinear congruence C connected with it. Let α, β denote the angles which a ray of C forms with the tangents to $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ The author's leading idea is to determine C by the director surface and the quantities $a = \sqrt{E} \cos \alpha$, $b = \sqrt{G} \cos \beta$. This way of determining a congruence seems to be most useful for solving some problems, for instance those in which a refraction or reflection of a congruence at a given surface is to be considered. The author establishes explicit formulae connecting the usual theory of rectilinear congruences with a, b, E, F, G, L, M, N and discusses, as an illustration, some interesting examples.

O. Borůvka (Brünn).

Synge, J. L.: *Note on a paper by H. Hilton: „On some properties of rectilinear congruences.“* Ann. of Math., II. s. 40, 58—61 (1939).

The purpose of this note is to generalize some formulae established in the above Hilton's paper for rectilinear congruences in n -dimensional spaces.

O. Borůvka.

Bachvaloff, S.: *Sur les couples de congruences stratifiables.* C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 271—272 (1938).

Étant données deux congruences L_1, L_2 à rayons l_1, l_2 correspondantes, stratifiables dans deux directions, c'est-à-dire qu'il est possible d'associer à la congruence L_1 un système Σ_1 de ∞^1 surfaces de manière que les plans tangents à ces surfaces le long du rayon l_1 passent par l_2 et inversement, l'A. considère le cas où l'angle et la distance de deux rayons l_1, l_2 sont des constantes. En écartant le cas particulier où la direction des perpendiculaires communes à l_1, l_2 ne varie pas, on montre que la solution du problème dépend de 4 fonctions d'un argument (voir aussi ce Zbl. 16, 416).

G. Vranceanu (Cernăuți).

Bachvaloff, S.: *Sur un couple de congruences paraboliques.* C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 415—417 (1938).

Étant donnée une correspondance biunivoque et continue entre les points A_0, A_3 de deux surfaces S_0, S_3 , telle que les asymptotiques de ces surfaces se correspondent, on peut considérer le couple de congruence L, L' formé par les droites $l(A_0, A_3)$ et les droites l' , intersections des plans tangents à S_0, S_3 dans les points A_0, A_3 . L'A., après avoir traité le cas où L et L' ont des points focaux différents (ce Zbl. 13, 323), considère ici le cas où L' possède des points focaux confondus, en choisissant comme tétraèdre de référence, le tétraèdre mobile

ayant comme sommets A_0, A_1, A_2, A_3 où A_1 est le point focal de l' et A_2 est un autre point de l' . Pour fixer la position de A_2 sur l' , on remarque que si la droite A_0A_1 n'est pas tangente à l'une des asymptotiques de S_0 , on peut prendre A_2 de façon que A_0A_1, A_0A_2 soient harmoniquement conjuguées aux tangentes aux lignes asymptotiques de S_0 . Si A_0A_1 est tangente à une ligne asymptotique de S_0 , on peut choisir A_0A_2 tangente à l'autre ligne asymptotique. Dans le premier cas la solution dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments et dans le second cas, de six fonctions d'un argument. (Il semble au Ref. que les conditions tirées de $w'_{30} = 0$ sont surabondantes de façon qu'il est possible que ces solutions ne soient pas les plus générales.) G. Vranceanu (Cernăuți).

Rossinski, Serge: Sur certains cas de déformation d'une congruence rectiligne avec conservation de ses surfaces réglées principales. Rec. math. Moscou, N. s. 4, 79—96 u. franz. Zusammenfassung 97—98 (1938) [Russisch].

L'auteur étudie les déformations d'une congruence rectiligne des droites C avec conservation de ses surfaces réglées principales, le rayon de la congruence restant toujours dans le plan tangent correspondant de la surface S que l'on déforme de manière que le système conjugué soit conservé (déformation à base principale). D'après le résumé français l'auteur étudie plusieurs cas spéciaux dont nous ne citerons qu'un exemple: Si l'on exige que la congruence soit normale, la surface S peut être une surface arbitraire, possédant une base principale, comprenant une famille de géodésique. Hlavatý (Praha).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Niemytzki, W.: Sur les systèmes de courbes remplissant un espace métrique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 99—102 (1938).

Verf. betrachtet in Verallgemeinerung des Begriffes der stationären Strömung Kurvensysteme in einem vollständigen metrischen Raum. Die Definition ist rein geometrisch, da sie vom Strömungsparameter t (Zeit) keinen Gebrauch macht. Ebenso wird die Stetigkeit eines Kurvensystems rein geometrisch definiert. Viele der Begriffsbildungen der Birkhoffschen „general theory of dynamical systems“, z. B. α - und ω -Punkte, Minimalmenge lassen sich übertragen, ebenso Stabilität im Sinne von Lagrange und Poisson. Wegen der sechs teilweise bewiesenen, teilweise angekündigten Sätze, die in der Hauptsache schon bei Strömungen bewiesen sind, sei auf die Note selbst verwiesen. E. Hopf (Leipzig).

Niemytzki, W.: Sur les familles de courbes du type de Bendixon. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 103—105 (1938).

Die Note beschäftigt sich mit Kurvenscharen (das brauchen keine Strömungen zu sein) in der Ebene. Es werden einfache lokale Bedingungen aufgestellt, unter welchen für die Kurvenschar die Sätze von Poincaré-Bendixon gelten. E. Hopf (Leipzig).

Haupt, Otto: Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. II. Konstruktion normierter Kreissysteme. J. reine angew. Math. 180, 44—72 (1939).

In der vorangehenden ersten Mitteilung dieser Arbeit (J. reine angew. Math. 178; dies. Zbl. 17, 327) wurde der Beweis für das Nichtvorhandensein zyklisch ordnungshomogener ebener Bogen von mindestens vierter und höchstens endlicher Ordnung auf den folgenden Satz zurückgeführt: Existiert ein zyklisch ordnungshomogener Konvexbogen \mathfrak{B} von mindestens fünfter und höchstens endlicher zyklischer Ordnung, so gibt es zu jedem Paare offener Teilbogen $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ von \mathfrak{B} mit $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}'$ ein sogenanntes normiertes Kreissystem, d. h. ein System von Kreisen, welche gewisse (kurz nicht ausdrückbare) Eigenschaften besitzen. Verf. zeigt in dieser zweiten Mitteilung, daß der ausgesprochene Satz richtig ist, daß es also für jeden zyklisch ordnungshomogenen Konvexbogen \mathfrak{B} (von mindestens fünfter und höchstens endlicher Ordnung) normierte Kreissysteme gibt. Verf. stellt die für die Konstruktion der normierten Kreissysteme notwendigen Hilfsmittel zusammen. Diese Hilfsmittel enthalten aber ziemlich allgemeine Sätze für Konvexbogen \mathfrak{B} . Sz. Nagy (Szeged).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sugli archi di traslazione di un automorfismo piano e sulle loro curve d'accumulazione. Mem. Accad. Ital. 9, 1—75 (1937).

L'auteur continue la série de ses publications (Zbl. 8, 274—275; 13, 369; 14, 181; 15, 319) sur les arcs de translation λ d'un automorphisme T d'un plan \mathfrak{P} , direct et sans points doubles. — Il nomme quasi-arc (quasi-segment) de translation un arc

(segment) qui est limite d'une suite d'arcs de translation; tenant compte que pour tout arc de \mathfrak{P} il existe un automorphisme de \mathfrak{P} le transformant en un segment, il se borne à l'étude topologique des quasi-segments de translation $\mu = PP^1$. Il pose $\mu^n = T^n(\mu)$, n entier positif, négatif ou nul, et pour un point X , $X^n = T^n(X)$. — Le premier chapitre traite de la position réciproque des μ^n ; il est montré entre autres que 1. parmi les points P^n seuls P et P^1 appartiennent à μ ; 2. pour $m \neq n$, μ^m et μ^n présentent un contact en chaque point commun qui leur est à tous deux intérieur; 3. si X est un point commun à μ^{-1} et à μ^n , $n \geq 1$, μ^{-1} et μ^n touchent μ en X sur bandes opposées; 4. si X est un point intérieur de μ^{-1} et de μ , μ^{-1} touche μ en X sur la bande opposée à celle où μ est touché en X par μ^{-1} . — Le second chapitre indique une classification des μ . Parcourant $\mu^{-1} = P^{-1}P$ de P^{-1} vers P : I. ou nous parvenons en P sans avoir rencontré μ (1^{ère} espèce), II. ou nous rencontrons μ en un premier point A ; continuant le chemin vers P , II₁. ou lorsque nous touchons éventuellement de nouveau μ , c'est sur la même bande que A (3^{ième} espèce), II₂. ou nous venons toucher μ sur la bande opposée à A en un premier point B , de nouveau, II₂₁. ou A est sur μ situé entre P et B (2^{ième} espèce), II₂₂. ou B est sur μ situé entre P et A (4^{ième} espèce). — Nous signalons entre autres les propositions suivantes: 1. si μ est de première espèce, c'est un segment de translation; 2. si μ est de seconde espèce, AA^1 et BB^1 sont deux segments de translation, PA^1 et P^1B sont deux pseudo-arcs de translation de première espèce d'origines respectives P et P^1 ; 3. si μ est de troisième ou quatrième espèce, AA^1 est un segment de translation, PA^1 et P^1A sont deux pseudo-arcs de translation de première espèce d'origines respectives P et P^1 . — Le troisième chapitre est consacré aux champs adjacents à une quasi-trajectoire $\dots + \mu^{-1} + \mu + \mu^1 + \dots$

Chr. Pauc (Paris).

Pauc, Christian: Sur les continus distanciables qui sont domaine de définition d'une fonction continue ne passant par chaque valeur qu'un nombre fini de fois. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 489—491 (1939).

Ein metrisierbarer Raum R besitzt die Eigenschaft P , wenn es in R eine stetige reelle Funktion $f(x)$ gibt, welche jeden Wert $y = f(x)$ nur in endlich vielen Punkten von R annimmt. Ist K ein kompaktes Kontinuum, welches die Eigenschaft P besitzt, so ist K eine beständig reguläre Kurve, deren Endpunkte eine separierte Menge bilden. Gibt es in K eine abgeschlossene diskontinuierliche Menge D derart, daß $K - D$ die Eigenschaft P besitzt, so ist K eine reguläre Kurve. Ist die Menge D abzählbar, so ist K sogar die Summe von höchstens abzählbar unendlich vielen Bogen, von denen je zwei höchstens Endpunkte gemein haben.

G. Alexits (Budapest).

Topologie:

Alexander, J. W.: On the concept of a topological space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 52—54 (1939).

Aus den abgeschlossenen Mengen (C -Mengen) eines Raumes werden die abgeschlossenen berandeten Mengen (CB -Mengen) ausgesondert; ihre Eigenschaften können axiomatisch gefordert werden: die leere Menge ist eine CB -Menge; Vereinigung und Durchschnitt von CB -Mengen ist wieder eine solche. Dann können die C -Mengen definiert werden. Mittels der CB -Mengen läßt sich der berandete und nichtberandete Teil eines Raumes unterscheiden; wichtig sind die Gitter aus Paaren (a, b) von Mengen, wo a eine CB -Menge, b eine C -Menge ist.

K. Reidemeister (Marburg, Lahn).

Ehresmann, C.: Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 153—155 (1939).

Im reellen n -dimensionalen projektiven Raume P_n ($n = 2p + 1$) gibt es nicht nur ein stetiges Vektorfeld, sondern P_n läßt sich sogar mit einer Geradenkongruenz fasern, die durch jeden Punkt genau eine Gerade schickt. Die Zerlegungsmannigfaltigkeit (Mannigfaltigkeit der Fasern) ist der komplexe n -dimensionale Raum (von $2p$ reellen Dimensionen), aber P_n ist nicht das topologische Produkt aus ihm und der Faser. Ist $n = 4k - 1$, so läßt sich P_n mit ebenen dreidimensionalen Unterräumen fasern. Das Poincarésche Polynom der Zerlegungsmannigfaltigkeit heißt

$t^{4(k-1)} + t^{4(k-2)} + \dots + t^4 + 1$. Es folgen Anwendungen dieser Ergebnisse auf Parallelismen in projektiven Räumen. *H. Seifert* (Heidelberg).

Ehresmann, Charles: Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 321—323 (1939).

In the paper it is proved (together with other results of a rather more general nature) that the manifold of the orthogonal and real group in $n + 1$ variables is homeomorph to that of the linear spaces g_n of the quadric Q_{2n} . The manifold is composed of two homeomorph parts connected (each of which is also a manifold of simple semi-spinors with homogeneous and real components) whose homology groups and bases were elsewhere indicated by the author (see this Zbl. 9, 329). *Achille Bassi* (Bologna).

Lefschetz, S.: On the mapping of abstract spaces on polytopes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 49—50 (1939).

Notwendige und hinreichende Bedingung für die stetige Abbildung (mapping) eines Raumes in ein Polytop ist die Existenz einer analytischen überdeckenden Menge \mathfrak{B} von offenen Mengen. Eine Menge \mathfrak{B} ist analytisch, wenn sich durch Unterteilungen aus \mathfrak{B} eine unendliche Folge überdeckender Mengen bilden läßt. *K. Reidemeister*.

Tukey, John W.: The intrinsic metric of a polytope. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 51 (1939).

Es wird ein Abstand für die Eckpunkte einer regulären Unterteilung von Simplexes erklärt. Aus einem Simplex entsteht durch unendlich oft iterierte reguläre Unterteilung eine metrische Punktmenge, die sich stetig in das euklidische Simplex abbilden läßt. *K. Reidemeister* (Marburg, Lahn).

Mechanik.

Kontinuumsmechanik:

Kiltchevsky, N.: Nouvelle théorie sur la mécanique des milieux continus. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 17—104 u. franz. Zusammenfassung 109—114 (1938) [Ukrainisch].

Im ersten Teil dieser Arbeit werden zunächst die grundlegenden geometrischen Vorstellungen über die Deformation eines Kontinuums untersucht. Zur Beschreibung eines Körpers im Deformationszustand dient die Gruppe der nichtholonomen Transformationen. Es wird der allgemeine Deformationstensor eines Kontinuums aufgestellt, der als Sonderfälle das Hookesche und das Stokesche Gesetz (Elastizitätstheorie bzw. Mechanik der zähen Flüssigkeiten) enthält. — Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Theorie der Enveloppen. Unter Anwendung der allgemeinen Methoden der Tensoranalysis wird die Deformation einer Enveloppe behandelt. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines Envelopelementes werden aufgestellt. *Estel*.

Williams, D.: The relations between the energy theorems applicable in structural theory. Philos. Mag., VII. s. 26, 617—635 (1938).

Übersichtliche Diskussion der Tragweite und des gegenseitigen Zusammenhangs von 6 in den Anwendungen der Elastizitätstheorie gebrauchten „Energiesätzen“. Es werden behandelt: das Prinzip der virtuellen Verrückungen, das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, die Sätze Castiglianos und die den dynamischen Sätzen von Bertrand und Kelvin entsprechenden statischen Theoreme, die ausagen, daß eine zusätzliche Zwängung in einem Körper unter gegebenen äußeren Lasten die innere Energie vermindert, bei gegebenen Randverschiebungen vermehrt.

Marquerre (Berlin-Adlershof).

Brillouin, Léon: On thermal dependence of elasticity in solids. Phys. Rev., II. s. 54, 916—917 (1938).

Kritik der bisherigen thermodynamischen Behandlung der elastischen Eigenschaften fester Körper. Als Grundlage soll man nicht die Untersuchung der elastischen

Schwingungen eines isotropen, sondern eines anisotropen Kontinuums nehmen. Für Schwingungen mit Frequenzen, die weit über dem Schallfrequenzgebiet liegen, sind die Elastizitätskoeffizienten durch Ableitungen des elastischen Potentials darstellbar; sie nehmen theoretisch nur schwach mit zunehmender Temperatur ab. Für Schall- und Ultraschallfrequenzen sind die Elastizitätskoeffizienten durch Ableitungen der freien Energie darzustellen. μ sollte mit wachsender Temperatur eine immer schneller werdende Abnahme zeigen; bei Zimmertemperatur sollte die Abnahme für Körper, die nicht zu nahe am Schmelzpunkt sind, von der Größenordnung 50—100 RT/V sein. Betrachtungen über den Schmelzvorgang. Eine ausführliche Darstellung wird im *Mém. Sci. math.* (Paris: Gauthier-Villars) erscheinen. *Bechert* (Gießen).

Sokolovski, V.: *Momentless shells.* Appl. Math. a. Mech., N. s. 1, 291—306 u. engl. Zusammenfassung 306 (1938) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit werden drehsymmetrische Membranschalen bei unsymmetrischen Belastungen untersucht. Mit Hilfe eines Fourieransatzes wird aus den Gleichgewichtsbedingungen eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Membranspannungen ermittelt. Für eine vorgegebene Abhängigkeit des Verhältnisses p der Hauptkrümmungsradien vom Öffnungswinkel θ ($p = c \cos^{2l} \theta \sin^{2k} \theta$) werden drei Gruppen von Rotationsschalen so bestimmt, daß die aufgestellte Differentialgleichung in eine hypergeometrische übergeht. Die Differentialgleichung der ersten Gruppe mit $k = 0$, $l = -1$ (Rotationsparaboloide und -hyperboloide) hat eine geschlossene trigonometrische Lösung, die der zweiten mit $k = 0$, $l = 0$ (d. h. $p = c$, konstantes Verhältnis der Hauptkrümmungsradien, Kurven von Ribaucour) und der dritten mit $k = 1$, $l = -1$ lassen sich mit Hilfe der hypergeometrischen Reihen lösen. Bei $c = 1, 3, 5 \dots$ gehen die hypergeometrischen Reihen der zweiten Gruppe in geschlossene Funktionen über, und für den Sonderfall $c = 1$ (Kugelschale) folgen die von H. Reißner (s. Festschrift H. Müller-Breslau) abgeleiteten Lösungen.

A. Kromm (Berlin-Adlershof).

Supino, Giulio: *Le condizioni ai limiti per le lastre elastiche piane.* Ann. Math. pura appl., IV. s. 17, 307—326 (1938).

Die Arbeit behandelt zunächst das Problem der Platte von endlicher Dicke, die nur am Rande belastet ist. Im Anschluß an Arbeiten von Love, Michell einerseits und Almansi andererseits werden hier Lösungen der allgemeinen räumlichen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie angegeben und besprochen, denen keine Deformation der Mittelebene entspricht und die den folgenden Randbedingungen: $M_t = 0$, $M_n = 0$, $P_z \neq 0$; $M_t = 0$, $M_n \neq 0$, $P_z = 0$; $M_t \neq 0$, $M_n = 0$, $P_z = 0$ genügen. Dabei bedeuten M_n , M_t , P_z resultierende Momentkomponenten bzw. Kraftkomponenten längs einer Erzeugenden des zylindrischen Umfanges. Die Indizes z , t , n entsprechen der Richtung senkrecht zur Plattenebene bzw. parallel bzw. senkrecht zur Begrenzungslinie in der Mittelebene. Zum Schluß wird erörtert, wie die erzielten Ergebnisse mit den bekannten Ergebnissen der Kirchhoffschen Theorie der dünnen Platte zusammenhängen. Diese Frage drängt sich um so mehr auf, da es ja bekanntlich ein Hauptergebnis dieser Theorie war, von bestimmten sehr nahe liegenden Voraussetzungen über den Verzerrungszustand ausgehend zu zeigen, daß nur zwei Randbedingungen $P_z - \frac{\delta M_n}{\delta s}$, M_t betreffend, den Spannungszustand eindeutig bestimmen.

Funk (Prag).

Merlin, Émile: *Étude du mouvement d'un fluide parfait dépourvu d'accélération.* Ann. École norm., III. s. 55, 223—255 (1938).

Étude du mouvement d'un fluide parfait lorsque chaque particule, conservant sa densité, est animée d'un mouvement rectiligne uniforme. On voit aisément que l'indicatrice I des vitesses est un point, une courbe ou une surface. Le cas où elle est un point est trivial, le fluide se déplace comme un solide. L'étude du cas où I est une courbe est aisée. L'auteur traite d'une manière détaillée le cas où I est une surface.

Soit G la congruence des lignes l , lieux des particules animées d'une même vitesse: Ces lignes qui se déplacent comme des fils rigides, sont planes et la détermination du mouvement revient à celle d'une surface I et d'une congruence G de courbes planes possédant certaines propriétés (voir p. 229). Le Chapitre I est consacré au cas où les courbes l sont des droites. Si la surface I est quelconque (Chap. II), les courbes l sont des coniques. Signalons que ces coniques sont des paraboles quand I est développable; si elles sont des cercles, I est une sphère; si elles sont des hyperboles équilatères, I est une surface minima.

P. Dubreil (Nancy).

Ugolini, Giovanni B.: *Interpretazione idraulica di un lemma di Levi Civita*. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 688—692 (1938).

In den Boden eines großen, mit Flüssigkeit gefüllten und durch einen Hahn völlig verschlossenen Gefäßes ist ein Rohr eingesetzt, durch das die Flüssigkeit ausfließen kann. Es wird die Kontraktion des Strahles in diesem Rohr näher untersucht. Ausgehend von dem Lemma von Levi-Civita und unter Benutzung der Bernoullischen Gleichung gelangt Verf. zu einer Formel für den Kontraktionskoeffizienten, die erkennen läßt, daß die Kontraktionszahl kleiner als 0,5 sein kann (Paradoxon von De Rios).

E. Estel (Leipzig).

Jacob, Caius: *Sur le coefficient de contraction des jets gazeux*. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 263—268 (1938).

Es wird eine Formel für die Kontraktionszahl eines gasförmigen Strahls aufgestellt, die eine Verallgemeinerung der Levi-Civitaschen Formel für einen flüssigen Strahl darstellt. Der Verf. geht aus von der Kontinuitätsgleichung und der Bernoullischen Gleichung und erhält unter Verwendung der Formel von Ostrogradsky einen analytischen Ausdruck für den Kontraktionskoeffizienten; der die Formel von Levi-Civita als Sonderfall enthält. Unter Benutzung des adiabatischen Gasgesetzes erhält die gefundene Formel eine Gestalt, aus der hervorgeht, daß der Kontraktionskoeffizient größer als $\frac{1}{2}$ ist.

E. Estel (Leipzig).

Jardetzky, W.: *Sur les conditions d'équilibre d'une masse fluide avec un flotteur*. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 149—154 (1938).

Es wird ein System Flüssigkeit — fester Körper betrachtet, bei dem die Dichte des festen Körpers viel kleiner als die der Flüssigkeit, das Verhältnis der Massen von festem Körper und Flüssigkeit klein ist und bei dem der feste Körper nicht völlig in die Flüssigkeit eintaucht. Analogie zu astronomischen Problemen (Liapounoffs Theorie über die Gestalt der Himmelskörper). Wegen Lösungsschwierigkeiten des allgemeinen Bewegungsproblems können hier nur Sonderfälle behandelt werden. Ziel der Arbeit ist die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen des Systems Flüssigkeit — schwimmender Körper. — Die Überlegungen gehen aus von der Gleichung für die Niveaulächen (Rotationsachse durch den Schwerpunkt des Systems) und finden in ihr und in dem Gesetz von Archimedes die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen. Zum Schluß wird auf den Fall, daß der Schwerpunkt des schwimmenden festen Körpers nicht auf der Rotationsachse oder in der Äquatorebene der Flüssigkeit liegt, speziell auf geophysikalische Fragen (Polflucht) hingewiesen.

E. Estel (Leipzig).

Sukurai, Tokio: *On the slow steady rotation of cylinder in viscous fluid*. III. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 997—1008 (1938).

In Erweiterung der Arbeiten von Sommerfeld über die Theorie der Schmiermittelreibung, H. Reissner [vgl. Zbl. Mech. 3, 82 (1935)] u. a., die das Problem zäher Flüssigkeiten zwischen zwei exzentrischen, relativ zueinander um ihre Figurenachsen mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotierenden Kreiszylinder behandeln, studiert Verf. die Bewegung einer zähen Flüssigkeit bei gleichförmiger Rotation des inneren Zylinders um die Achse des äußeren als Drehachse für den Fall, daß die Figurenachse des inneren und des äußeren Zylinders nicht zusammenfallen. Verf. geht aus von der Gleichung für

die Stromfunktion ψ
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi = 0,$$

deren Lösung in einer unendlichen Reihe mit noch unbekannten Koeffizienten gefunden wird. Durch eine Anzahl von Vernachlässigungen reduziert sich diese Lösung auf einen Ausdruck von 10 Gliedern, deren Koeffizienten bestimmt werden. Die Berechnung von Widerstand, Druck und anderen physikalischen Größen mit Hilfe der Stromfunktion wird angekündigt.

E. Estel (Leipzig).

Westerfield, Everett C., and W. B. Pietenpol: Viscosity in an expanding bubble. Phys. Rev., II. s. 55, 306—307 (1939).

Wenn sich eine Blase gleichförmig ausdehnt, wird ein Teil der zwischen Innerem und Äußerem der Blase vorhandenen Druckdifferenz, die im Gleichgewicht mit der Oberflächenspannung der Flüssigkeit steht, dazu verwendet, die Ausdehnung der Blase gegen die Zähigkeitskräfte aufrechtzuerhalten. Bei bekannter Oberflächenspannung kann für inkompressible Flüssigkeiten der Zähigkeitskoeffizient bestimmt werden. Die Theorie ist entwickelt worden für den allgemeinen Fall der Ausdehnung einer Blase unter Vernachlässigung der elastischen Kräfte. Unter Anwendung der Dyadenrechnung wird eine Beziehung zwischen der Druckdifferenz $p_1 - p_2$, der Oberflächenspannung γ , der Zähigkeit μ , dem mittleren Radius r der Blase, ihrer Dicke d und ihrer mittleren radialen Geschwindigkeit v aufgestellt. Als Näherungsgleichung ergibt sich für den Fall, daß die Dicke der Blase klein ist gegen ihren mittleren Radius $p_1 - p_2 = 4\gamma/r + 12\mu v d/r^2$. Diese Formel ist anwendbar auf Blasen besonders zäher Stoffe, wie z. B. geschmolzenes Glas.

E. Estel (Leipzig).

Brillouin, Marcel: Instabilité inévitable d'un liquide pesant qui tourne, sans mouvement relatif, avec un noyau solide qu'il entoure. Conséquences océanographiques et géodésiques. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 816—819 (1938).

Bei Aufstellung der Theorie der Meere ist man bisher von gewissen Annahmen, die im einzelnen angeführt werden und die zu stabilen Konfigurationen geführt haben, ausgegangen. Verf. übt an diesen Voraussetzungen Kritik und zweifelt an ihrer Richtigkeit. Er vertritt vielmehr die Meinung, daß es für diesen Fall keine stabile Konfiguration gibt. — Er geht aus von den Gleichungen für kleine periodische Bewegungen und zeigt, daß aus ihnen für jede kleine Schwingung Instabilität folgt. Hieraus ergeben sich entsprechende Konsequenzen für die Frage nach der Stabilität der Ozeane. Daß die Theorie von Laplace die behandelten Schwierigkeiten nicht zeigt, liegt in einer mit der allgemeinen Theorie unverträglichen Voraussetzung begründet. Die Arbeiten von Clairaut, Laplace, Callandreau, Poincaré, Jeans, Véronnet u. a. über die Weltentstehung bedürfen hiernach einer Korrektur.

E. Estel (Leipzig).

Young, Gale: Theory of diffusion forces in metabolizing systems. Growth 2, 165—180 (1938).

Es handelt sich um die Frage: Welche „Mitführungskraft“ übt ein verdünnter gelöster Stoff (1), der eine vorgegebene Geschwindigkeit U hat, auf die Moleküle eines anderen verdünnten gelösten Stoffes (3) aus, die außer der thermischen Bewegung keine Eigenbewegung haben und die in einem Lösungsmittel (2) sich befinden, das ebenfalls keine Eigenbewegung hat? Die Frage wird zunächst mit den Ansätzen der kinetischen Gastheorie diskutiert (eine verdünnte Lösung ist nach van t'Hoff einem idealen Gas äquivalent), dann mit den Methoden der Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten. Aus plausiblen Annahmen folgt, daß die Reibungsglieder in den hydrodynamischen Gleichungen nicht vernachlässigt werden dürfen; die Gesamtkraft auf ein (annähernd) kugelförmiges Teilchen der Sorte 3 in der Strömungsrichtung von 1 ist in guter Näherung: $3/2 \cdot U \cdot \text{Volumen des Teilchens} \cdot kT/(m_1 D)$; m_1 = Masse eines Teilchens 1, D = Diffusionskoeffizient. Das Ergebnis gilt für inkompressible und für kompressible Flüssigkeiten bei kleinem Reibungskoeffizienten ($\approx 10^{-4}$ CGS) und kleiner Strömungsgeschwindigkeit ($\approx 10^{-5}$ cm/sec).

Bechert (Gießen).

Rashevsky, N.: Outline of a mathematical biophysics of cellular forms and movements. Growth 2, 213—222 (1938).

Beispiele zur näherungsweisen Behandlung von Diffusions- und Strömungsaufgaben, wie sie die Biologie des Zellbaus stellt. Bechert (Gießen).

Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

Wintner, Aurel: Liouville systems and almost periodic functions. Amer. J. Math. 60, 463—472 (1938).

Bei den Liouvilleschen separierbaren Differentialsystemen $\oint_{t_a}^{t_b} L dt = 0$ hat die Lagrangesche Funktion L die Form

$$L(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{2} r \sum_1^n g_i(x_i) \dot{x}_i^2 + \sum_1^n f_i(x_i) \dot{x}_i + \frac{1}{r} \sum_1^n e_i(x_i), \quad r = \sum_1^n d_i(x_i)$$

mit $r > 0$ und $g_i > 0$. Ist h die Energiekonstante der Lösung $x_i(t)$, so wird durch die Zeittransformation

$$dt^* = \frac{dt}{r(x_i(t))} \quad \left(v' = \frac{dv}{dt^*}, \dot{v} = \frac{dv}{dt} \right)$$

das System in ein ebensolches mit der Lagrangefunktion

$$L^*(x, x'; h) = \sum_1^n L_i^*(x, x'; h), \quad \text{mit} \quad L_i^* = \frac{1}{2} g_i x_i'^2 + f_i x_i' + e_i + h d_i$$

und der Energie $h^* = 0$ transformiert. Dasselbe zerfällt in die Einzelsysteme mit $L = L_i^*(x_i, x_i')$, und die Lösungen sind unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen periodisch,

$$x_i = x_i(t^*) \equiv x_i(t^* + \tau_i),$$

wobei die Perioden τ_i im allgemeinen inkomensurabel sind (die $\frac{1}{\tau_i}$ sind Funktionen von h und $n - 1$ partiellen Energiekonstanten h_i^* und im allgemeinen linear unabhängig). Man will darüber hinaus wissen, in welcher Weise die $x_i(t)$ von der ursprünglichen Zeit t abhängen. Unter Zuhilfenahme eines Satzes über fastperiodische Funktionen wird bewiesen: Immer, wenn die $\frac{1}{\tau_i}$ linear unabhängig sind, ist

$$x_i = \theta_i \left(\frac{t}{\tau_1}, \frac{t}{\tau_2}, \dots, \frac{t}{\tau_n} \right),$$

wo $\theta_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$ auf dem n -dimensionalen Torus der $\vartheta_i \pmod{1}$ eindeutig und stetig ist.

E. Hopf (Leipzig).

Weyl, Hermann: Mean motion. II. Amer. J. Math. 61, 143—148 (1939).

Verf. hat vor kurzem auf sehr einfache Weise das alte Problem gelöst, daß eine Summe von Epizykeln

$$z(t) = r(t) e^{2\pi i \varphi(t)} = \sum_1^n a_\nu e^{2\pi i (\vartheta_\nu + \lambda_\nu t)} \quad (a_\nu > 0)$$

eine mittlere φ -Winkelbewegung besitzt, wenn für ganze k_ν , $\sum_1^n k_\nu = 0$, k_ν nicht alle gleich Null, stets $\sum k_\nu \lambda_\nu \neq 0$ ist. Für diese von den Anfangsphasen ϑ_ν unabhängige mittlere Bewegung wurde auch eine einfache Formel hergeleitet. Hier wird der allgemeine Fall diskutiert und keine Irrationalitätsvoraussetzung über den Vektor $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gemacht. Aus den Irrationalitätseigenschaften dieses Vektors läßt sich ein ganz bestimmter linearer Teilraum E des n -dimensionalen Vektorraumes herleiten. Liegt der Vektor $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ in E , so existiert gleichmäßig die mittlere Bewegung. Sie ist unabhängig von diesem Vektor (in E) und läßt sich durch eine allgemeine Formel ausdrücken, die das natürliche Analogon zur Formel im obigen Irrationalitätsfall darstellt. Sie ist eine Linearform der λ_ν mit nichtnegativen Koeffizienten, deren Summe gleich Eins ist. Die Koeffizienten lassen sich durch bestimmte Integrale über E ausdrücken. Außerhalb E wird die mittlere Bewegung nicht untersucht. E. Hopf.

Vălcovici, V.: Sur les théorèmes généraux du mouvement des systèmes. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 245—252 (1938).

Teodoriu, Luca: Une application du viriel en mécanique. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 259—262 (1938).

Agostinelli, Cataldo: Sui sistemi dinamici corrispondenti. Boll. Un. Mat. Ital. **17**, 245—246 (1938).

Ablehnung der in dies. Zbl. **18**, 179 geübten Kritik an einer gleichbetitelten Arbeit des Verf. *Harald Geppert* (Gießen).

Hamel, Georg: Nieholonome Systeme höherer Art. S.-B. Berlin. math. Ges. **37**, 41—52 (1938).

The author considers non holonomic systems for which the constraints are given by equations of the form $f_\alpha(x'_i, x_j) = 0$ ($\alpha = m + 1, \dots, n$) when the functions f_α are in general not linear in the derivatives $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$ of the n Lagrangian parameters of the system. It is shown, in relation also with other results of the author and in relation with some recent work of Leif Johnsen (this Zbl. **17**, 135), that we can give to the equations of motion a form which is a generalisation of the eq. of Lagrange-Euler. We arrive to this form, if we associate to the $n - m$ functions f_α , other m functions f_β ($\beta = 1, 2, \dots, m$), forming with f_α a system of n independent functions in the n variables x'_i . This means that if we introduce the quasi-coordinates θ_σ , by the formulae

$$\frac{d\theta_\sigma}{dt} = w_\sigma = f_\sigma(x'_i, x_j), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

we can have by the resolution of these equations

$$x'_i = F_i(w_\sigma, x_j). \quad (2)$$

Introducing these expressions of x'_i in the vis viva which is supposed not to depend of t and by a proper application of the principle of Lagrange, the equations of motion become m differential equations of the first order in the m variables w_β . For the integration, we must associate to these equations, the eq. (2) with the conditions $w_\alpha = 0$ given by the constraints and we obtain a differential system of first order of $n + m$ equations in the $n + m$ functions x'_i, w_β . — The author considers also non holonomic systems for which the constraints depend of the second derivatives x''_i and he observes, that in this case, we cannot have for the equations of motion a form which generalises the eq. of Lagrange-Euler. *G. Vranceanu* (Cernaui).

Godefroy, Marcel, et Henri Poincaré: Sur la notion de stabilité. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 1161—1163 (1938).

Gegeben ist ein mechanisches System S , das den folgenden Bedingungen genügt:
1. Der Zustand des Systems zur Zeit t kann durch einen Punkt M in einem n -dimensionalen Raum dargestellt werden. 2. Es existiert eine Gleichgewichtslage, die durch O dargestellt wird. 3. Die Auslenkung von S aus einer Lage M_0 ist gegeben durch

$$d\bar{M} = [\bar{\alpha}\bar{M} + \bar{h}(M)]dt.$$

Dabei hängt die Matrix $\|\alpha\|$ weder von der Zeit noch von M ab, und $\bar{h}(M)$ ist ein unendlich kleiner Vektor in bezug auf OM . Ein zweites System S' besitze zur Zeit t die gleiche Konfiguration wie S , gehorche aber dem einfacheren Gesetz

$$d\bar{M}' = \bar{\alpha}M'dt.$$

Die Verf. untersuchen, unter welchen Bedingungen zur Entscheidung der Stabilität das System S durch S' ersetzt werden darf. *C. Schmieden* (Darmstadt).

Beschkine, Léon: Sur une classe de mécanismes à deux degrés de liberté. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 1084—1085 (1938).

Untersuchung der Bewegung zweier gekoppelter Paare von Rollkurven. *Klose*.

Grassi, Luigi: Su di un recente teorema del prof. Dario Graffi sui sistemi oscillanti dissipativi. *Boll. Un. Mat. Ital.* **17**, 182—186 (1938).

Si esamina la natura delle radici dell'equazione caratteristica di un sistema meccanico dissipativo a due gradi di libertà e si mostra come i risultati ottenuti si possono applicare ad un recente teorema del Graffi (questo *Zbl.* **18**, 279). *Autoreferat.*

Tzitzeica, G.: Mouvements à un paramètre d'un solide. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* **40**, Nr 1/2, 23—26 (1938).

Selon Study la position d'un corps solide peut être déterminée par 8 coordonnées homogènes liées par une relation quadratique. A un mouvement à un paramètre on peut alors faire correspondre une courbe C en R_7 , tracée sur une variété quadratique à 6 dimensions. L'auteur considère les fondements naturels de la classification des courbes C .
O. Bottema (Deventer, Holl.).

Sispánov, Sergio: Ein Spezialfall der Bewegung eines starren Körpers. *Bol. mat.* **11**, 225—231 (1938) [Spanisch].

Popoff, Kyrolle: Les problèmes de la balistique extérieure à la lumière des mathématiques modernes. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* **40**, Nr 1/2, 13—22 (1938).

Popoff berichtet über seine eigenen Untersuchungen zur Lösung des außerballistischen Problems (*Mém. Artillerie franç.* 1923, 1926, 1929, 1930, 1931, 1936, 1937. Das Hauptproblem der äußeren Ballistik. Leipzig 1932.) *Klose* (Berlin).

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

Armellini, G.: I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **27**, 609—614 (1938).

In einer früheren Note (dies. *Zbl.* **18**, 181) hatte Verf. gezeigt, daß, wenn das Newtonsche Gravitationsgesetz geändert wird in

$$F = -f \frac{m m'}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right)$$

(ε eine sehr kleine Konstante), die Planetenbahnen immer mehr kreisförmig werden und die Planeten in demselben Sinn sich bewegen müssen wie die Sonne um ihre eigene Achse. Hier zeigt er nun, daß die Ebenen der Planetenbahnen asymptotisch in die Ebene des Sonnenäquators übergehen. Durch diese Änderung des Newtonschen Gravitationsgesetzes könnte also die Eigenschaft des Planetensystems erklärt werden, daß alle Planeten in schwach exzentrischen Bahnen nahezu in derselben Ebene in demselben Sinn sich bewegen.
G. Schrutka (Wien).

Armellini, G.: I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton. III. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **28**, 117—123 (1938).

Wie in zwei früheren Arbeiten (dies. *Zbl.* **18**, 181 u. vorst. Ref.) wird die Anziehung zweier Massenpunkte mit

$$F = -f \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right) \frac{m m'}{r^2}$$

angenommen und werden die Differentialgleichungen der Bewegung eines Planeten um die Sonne unter Berücksichtigung der Sonnenrotation aufgestellt. *H. Hornich.*

Garcia, Godofredo, et Alfred Rosenblatt: Sur la formule de Stokes dans la théorie de la gravité. *C. R. Acad. Sci., Paris* **207**, 969—970 (1938).

Die Verf. ziehen einige Folgerungen aus ihrer unter gleichem Titel [*C. R. Acad. Sci., Paris* **206**, 423 (1938); dies. *Zbl.* **18**, 429] erschienenen Arbeit, indem sie den beiden Integro-Differentialgleichungen, auf die sie das Problem zurückgeführt haben, die Bedingung für die Konstanz der Masse hinzufügen; sie zeigen, unter welchen Voraussetzungen sich der einfache Fall des Satzes von Stokes einstellt, und geben einige Formeln für den Fall, daß nur das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit beibehalten wird. *Hopfner.*

Zagar, F.: Il caso astronomico del problema dei due corpi di masse crescenti. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 11, 255—284 (1938).

Für den Fall, daß zwei der Newtonschen Anziehung unterworfenen Körper bei ihrer Bahnbewegung langsam an Masse zunehmen, werden die Differentialgleichungen für die Änderungen der Konstanten der Keplerbewegung aufgestellt. Die säkularen Störungen der Bahnelemente und der asymptotische Charakter der Bahnbewegung werden ausführlich diskutiert. Den Beschluß bilden kosmogonische Betrachtungen.

Klose (Berlin).

Ganguly, H. K.: On Keplerian orbits in the field of a nucleus radiating mass. Bull. Calcutta Math. Soc. 30, 35—44 (1938).

Das Problem der Bewegung eines Körpers um eine Masse, die infolge Ausstrahlung zeitlich abnimmt, wurde von Jeans, Brown u. a. behandelt. Verf. untersucht durch ausführliche explizite Berechnungen den Spezialfall, daß die Massenabnahme durch das Gesetz $m = -\alpha m^3$, wo α eine Konstante ist, gegeben ist, und gelangt zu Ergebnissen, die im wesentlichen mit denen von Jeans übereinstimmen. *Strömgen.*

Dramba, Constantin: Sur la régularisation du problème restreint des trois corps pour les valeurs de l'excentricité, voisines de l'unité. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 277—280 (1938).

Das beschränkte Dreikörperproblem wird für den Fall nahezu parabolischer Bewegung der verschwindend kleinen Masse nach dem Vorgange von Chazy regularisiert durch $u = \sqrt{e^2 - 1} U$ (u exzentrische Anomalie, e numerische Exzentrizität). Die Bedingungen für die Existenz von genau parabolischen Bahnen werden formuliert.

Klose (Berlin).

Belorizky, D.: Les points singuliers dans le problème restreint des trois corps. C.R. Acad. Sci., Paris 207, 1382—1384 (1938).

Yamagata, Toshio: On the density-distribution of a close binary and the motion of the periastron in its orbit. Jap. J. Astron. Geophys. 16, 19—35 (1938).

Walter has given (this Zbl. 7, 258) a formula for the motion of the periastron of the orbit of a binary star in terms of the radius of the orbit, the figures of the stars, and the value of a certain parameter μ for each star. This parameter depends upon the density distribution in the star, and is in fact the ratio of its moment of inertia about the axis perpendicular to the plane of the orbit to that of a homogeneous star of the same mass and figure. The present paper is mainly concerned with the computation of μ for a number of close binaries. The author first tabulates the values derived from Eddington's stellar model. He then calculates values using Chandrasekhar's theory of distorted polytropes. This work requires the evaluation of a large number of integrals which he lists. Finally he uses Walter's formula to predict the motion of the periastron in several binary systems. However, he notes in a postscript that he has become aware of an error in Walter's formula, and promises a further investigation of the motion of the periastron.

W. H. McCrea (Belfast).

Schütte, K.: Theoretische Intensitätskurven von rotierenden Gleichgewichtsfiguren. I. Intensitätsschwankungen des dreiaxigen Ellipsoides. Astron. Nachr. 267, 369—384 (1939).

Mathematische Physik.

Elektrodynamik:

Eckart, Carl: The electrodynamics of material media. Phys. Rev., II. s. 54, 920—923 (1938)

Als Ausgangspunkt dient das Variationsprinzip:

$$\delta \int \left[L + \sum_n \theta_n [\dot{N}_n + \operatorname{div} (N_n v_n)] \right] dv dt = 0;$$

das Integral geht über den vierdimensionalen Raum; die Lagrangefunktion L hängt ab von \mathfrak{D} , \mathfrak{H} (elektrische Induktion und magnetische Feldstärke), N_n (Teilchenzahl im Systemzustand n), v_n (makroskopische Teilchengeschwindigkeit), θ_n (entspricht Diracs Winkelvariablen, die zur Wurzel aus der Teilchenzahl kanonisch konjugiert ist; θ_n hat die Dimension einer Wirkung); der Punkt bedeutet Differentiation nach t . Als Nebenbedingungen gelten: $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \sum_n N_n e_n$; $\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \dot{\mathfrak{D}} = \sum_n N_n e_n v_n$. Das elektromagnetische Viererpotential kommt nur als Lagrangescher Multiplikator vor. Setzt man: $\mathfrak{E}_x \equiv -\partial L / \partial \mathfrak{D}_x$; $\mathfrak{B}_x \equiv -\partial L / \partial \mathfrak{H}_x$; ..., so folgt: $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$; weiter: $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \dot{\mathfrak{B}} = 0$. Durch Variation von θ_n , N_n , v_n kommen noch 5 Gleichungen dazu. Der Energie-Impulssatz läßt sich explizit anschreiben. Für spezielle Formen von L erhält man Gleichungen, die formal der Schrödingerschen Wellengleichung, Diracs Dispersionstheorie, der klassischen Theorie der wirbelfreien Strömung eines Gases entsprechen. Dem physikalischen Inhalt nach ist die Analogie aber unvollständig. Bechert (Gießen).

Uller, K.: Die Erklärung der elektromagnetischen Induktion aus der Wellenkinematik und der Fall der bisherigen wissenschaftlichen Elektrodynamiken; die allgemeine Induktion. Z. ges. Naturwiss. 4, 353—375 (1939).

Verf. versteht unter Induktion die Fortführung einer Welle längs einer Unstetigkeitsfläche; Unstetigkeitsfläche ist dabei die Grenzfläche zweier Körper oder die Grenze zweier verschieden bewegter Körper (Ullers Definition). Er behauptet, dieses Induktion sei „eine notwendige Folge der Existenz fortpflanzungsfähiger Mittel, sofern sie begrenzt sind. Die reine Induktion ist mithin eine apriorische, d. h. vorphysikalische Felderscheinung in begrenzten Mitteln mit gewissen Eigenschaften, also ein naturumspannendes Phänomen“. Als ob aus der Existenz solcher Medien denknotwendig das Fortführen der Welle längs einer Grenzfläche folgen würde. Der Rest des Aufsatzes enthält ähnliche Fehlschlüsse und physikalische Unrichtigkeiten. Bechert (Gießen).

● **Guillet, A., et M. Aubert: Propriétés électrostatiques des systèmes sphériques.** Mém. Sci. physiques Fasc. 38, 55 pag. Paris (1938).

Verff. setzen sich zum Ziel, die mathematische und numerische Grundlage zu schaffen für die Wirkungsweise eines Elektrometers, das aus einer Ebene und einer Kugel besteht, und eines solchen Instruments, das durch die gegenseitigen Kräfte zweier elektrisierter Kugeln wirkt. In der Einleitung stellen sie die allgemeinen Eigenschaften bezüglich Ladungsverteilung und Kraftwirkung zweier geladener Leiter zusammen, wobei insbesondere die Methode der Spiegelbildladungen zur Anwendung gelangt. Die erste Aufgabe, welche sie behandeln, lautet: Welche Ladung muß einem kugelförmigem Leiter erteilt werden, damit er das Potential V erhält in bezug auf eine benachbarte leitende Ebene, welche das Potential O besitzt? Durch Anwendung der Spiegelungsmethode erhalten Verff. in einfacher Weise die gegenseitigen Ladungen der Kugel und der Ebene und hieraus ihre Kapazität. Diese Ausdrücke erlauben die Berechnung der Kräfte, welche die Leiter aufeinander ausüben. Verff. beschreiben die Anwendung dieser Anordnung zur Konstruktion eines Elektrometers. Hierauf berechnen sie die Ladungsverteilung auf der Kugel und auf der Ebene und stellen diese Ladungsverteilung in Kurven und Tabellen als Funktion der Abmessungen dar. Die nächste Aufgabe lautet analog wie die oben formulierte, bezieht sich aber auf zwei leitende Kugelflächen. Durch Anwendung der Spiegelbildmethode erhalten Verff. die Gesamtladungen der Kugeln und ihre gegenseitige Kapazität. Hieraus berechnen sie die Kraftwirkungen der Kugeln aufeinander. Diese Kugeln werden zur Konstruktion eines Kugelelektrometers angewandt, wobei Verff. die auftretenden Kräfte in Tabellen und Kurven als Funktion der Systemabmessungen angeben. Bei der Berechnung der Ladungsdichten auf den beiden Kugeln wenden Verff. Polynome an, welche sie als elektrosphärische bezeichnen. Die Ausdrücke für diese Polynome werden numerisch in Tabellen ausgewertet. Endlich wenden Verff. ihre Ergebnisse zur Berechnung der elektrischen Feldstärken an, welche bei Durchschlagsversuchen zwischen Leitern der

genannten Gestalt auftreten. Auch hier werden die numerischen Ergebnisse in Tabellen zusammengestellt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Feld, J.: The condenser as a system with distributed constants. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 8, 874—882 (1938) [Russisch].

Drysdale, C. V.: Magnetism and the Maxwellian theory. *Nature, Lond.* 143, 277—278 (1939).

Leipunskij, O.: On the displacement of the Curie point under the action of pressure. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 8, 1026—1030 (1938) [Russisch].

Dekhtjar, M.: The influence of elastic stresses on the initial susceptibility of monocrystals. *Techn. Physics USSR* 5, 676—684 (1938).

Der Akulovsche Tensor der Anfangspermeabilität deformierter kubischer Einkristalle wird experimentell bestätigt. Die Änderung der Anfangspermeabilität durch elastische Spannungen hängt sehr stark von der Reihenfolge ab, in der das Magnetfeld und die elastischen Spannungen eingeschaltet werden; es wird versucht, diese Erscheinung mit dem Vorgang der Entmagnetisierung in Zusammenhang zu bringen.

J. Meixner (Gießen).

Morse, Philip M., and Pearl J. Rubenstein: The diffraction of waves by ribbons and by slits. *Phys. Rev., II. s.* 54, 895—898 (1938).

The authors deal with these problems by applying the analysis, corresponding with the elliptic cylinder functions (Mathieu functions) quite along the same lines, as were set forth in *Erg. d. Math.* I, part 3 and in *Z. Physik* 69, 597 (1931) by Strutt (these references are not given in the paper). The properties and the normalization of the suitable Mathieu functions are briefly dealt with and newly computed values and tables, which are to be published, are made use of. For different angles of incidence of primary plane waves upon a slit in an infinite screen and upon a ribbon of finite width and for two sets of boundary conditions corresponding with different polarizations of incoming electromagnetic waves, the intensity of the scattered waves is given as a function of the scattering angle (polar diagrams) for three different ratios of slit width to wavelength. The transmission factor, being the ratio of the total energy of scattered waves to the energy contained in the incoming waves is computed as a function of the ratio of the slit (ribbon) width to the wavelength for the angles of incidence: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 and 90 degrees. The correlation of a slit to a ribbon is obtained by Babinet's principle (not stated explicitly). Some of the results are well confirmed by Strutt's computations (see above). *M. J. O. Strutt*.

Grinberg, G.: On the theory of the plate diode operation at high frequency. *J. techn. Physics, Leningrad* 8, 1137—1154 (1938) [Russisch].

Grünberg, G.: On the theory of the action of a plane diode at high frequencies. *Techn. Physics USSR* 5, 696—714 (1938).

Verf. geht von der Differentialgleichung eines elektrischen Kreises aus, der aus der Reihenschaltung eines Widerstandes, einer Selbstinduktion, einer Spannungsquelle und der betrachteten ebenen Diode zusammengesetzt ist. Die Wirkung der Diode wird in dieser Gleichung durch einen Potentialausdruck dargestellt, für den Verf. eine Reihenentwicklung nach Potenzen der Wechselspannungsamplituden aufstellt. Bei dieser Entwicklung wird die endliche Laufzeit der Elektronen von der Kathode zur Anode der Diode in Betracht gezogen. Diese allgemeine Reihenentwicklung wird auf den Sonderfall angewandt, daß der obengenannte Widerstand sowie die Selbstinduktion gleich Null sind, sodann auf den Fall, daß die Elektronenlaufzeit in der Diode sehr klein ist, worauf Verf. schließlich wieder den Widerstand und die Selbstinduktion berücksichtigt. Einige Hilfsfunktionen, welche bei der Aufstellung der genannten Reihenentwicklung benutzt werden, werden tabellenmäßig zusammengestellt. Verf. stellt fest, daß einige seiner Sonderfälle die gleichen Ergebnisse zeigen, wie sie früher von anderen Autoren angegeben wurden.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Bashkirov, N.: Selfexcitation and calculation of hypermagnetron characteristics based on the analysis of electron trajectories. *Ž. exper. teoret. Fis.* 8, 1040—1056 (1938) [Russisch].

Spiwak, G., and E. Reichrudel: Theory of collector currents in a plasma disturbed by a magnetic field. *Techn. Physics USSR* 5, 715—724 (1938).

Die Verf. berechnen den Einfluß äußerer Magnetfelder auf die Elektronenströme, die an einer ebenen Sonde in einem Plasma gemessen werden. Hierzu werden die Bewegungsgleichungen eines Elektrons in gekreuzten bzw. parallelen elektrischen und magnetischen Feldern integriert. Darnach wird eine Mittelung über die Anfangsgeschwindigkeiten der das Plasma verlassenden Elektronen ausgeführt. Ist das Magnetfeld zur Sonde parallel, so beschreiben die Elektronen zyklonische Bahnen in der Langmuirschen Schicht und kehren z. T. in das Plasma zurück, ohne die Sonde zu erreichen. Dies führt zu einer Verkleinerung des an der Sonde gemessenen Stroms durch das Magnetfeld. Ist das Magnetfeld zur Sonde senkrecht, so wird der Sondenstrom nicht verkleinert. Weizel (Bonn).

Klarfeld, B.: The potential gradient in the positive column. *Techn. Physics USSR* 5, 725—740 (1938).

Der Gradient E (Feldstärke) in der positiven Säule von Entladungen in Edelgasen und Metaldämpfen wird mit 2 stromlosen Sonden gemessen. Störende Einflüsse der Kathode werden durch Umbiegen des Rohres um 180° ausgeschaltet. Bei Ne, Ar, Kr und Hg wächst der Gradient zuerst mit dem Druck, erreicht ein Maximum bei 0,2 (Ne), 0,05 (Ar, Kr), 0,02 (Hg) Torr, um nach Durchlaufen eines Minimums bei 2—3 (Ne, Ar, Kr), 0,2 (Hg) Torr monoton anzusteigen. Bei Helium und Kalium ist der Anstieg von Anfang an monoton. Im Säulenplasma gilt

$$i = N_e e K E, \quad K = 0,75 \sqrt{\frac{\pi}{8 k m T_e}} e \lambda_e,$$

(K Beweglichkeit, e Ladung, λ_e freie Weglänge, T_e Temperatur, N_e Zahl pro cm Säulenlänge der Elektronen). Mißt man N_e und T_e mit Sonden und entnimmt λ_e aus Wirkungsquerschnittsmessungen nach Ramsauer, so kann man E ausrechnen. Es ergibt sich qualitative Übereinstimmung mit den gemessenen Kurven, insbesondere kommt der Unterschied zwischen He und Ar richtig heraus. Die Minima sind Folgen des Ramsauereffekts. Weizel (Bonn).

Rosen, N.: A field theory of elementary particles. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 94—101 (1939).

Zuerst wird ein Überblick über die elektrodynamischen Theorien von Maxwell, Mie, Born und Infeld gegeben. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die elektromagnetischen Potentiale explizit in den Feldgleichungen vorkommen müssen, wenn eine befriedigende klassische Feldtheorie der Elementarteilchen zustande kommen soll. Um Eichinvarianz zu erreichen, werden neben den Tensoren $F_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes und den Potentialen φ_μ neue Größen ψ und $\chi_\mu = \partial\psi/\partial x_\mu - i\varepsilon\varphi_\mu\psi$ eingeführt; die Lagrangefunktion L wird additiv zusammengesetzt aus der Lagrangefunktion L_f des elektromagnetischen Feldes und einem Anteil $L_m = -\chi^\mu\chi_\mu^* + \sigma^2\psi\psi^*$; ε und σ sind willkürliche Konstanten. Aus dem Variationsprinzip $\delta\int L\sqrt{-g}d\tau = 0$, in dem φ_μ und ψ unabhängig variiert werden sollen, erhält man nichtlineare Gleichungen für ψ , χ_μ und $F_{\mu\nu}$. Die letzteren lauten: $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2\pi i\varepsilon(\psi^*\chi^\mu - \psi\chi^{\mu*})$. Es gibt kugelsymmetrische statische Lösungen, die Elektronen entsprechen könnten; als Randbedingungen werden dabei gefordert: $\psi \rightarrow 0$, $\varphi_1 \rightarrow \text{const}/r$ für $r \rightarrow \infty$. Die Masse des Teilchens ergibt sich negativ; Verf. hält es für möglich, daß diese Schwierigkeit bei der Quantelung seiner Gleichungen verschwindet. Zum Schluß Betrachtungen über mögliche Eigenschaften der Lösungen der vorgeschlagenen Feldgleichungen.

Bechert (Gießen).

Quantentheorie:

Bhar, J. N.: Stratification of the ionosphere and the origin of the E_1 -layer. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. **12**, 363—386 (1938).

Berechnung der Ionisation in hohen Atmosphärenschichten nach der Methode von Pannekoek; Verf. macht aber für die Ionisierungswahrscheinlichkeit ψ_ν einen anderen Ansatz: $\psi_\nu \sim 1/\nu$ (ν = Frequenz der einfallenden Sonnenstrahlung). Für die Zusammensetzung der Atmosphäre wird angenommen: Oberhalb 100 km besteht sie im wesentlichen aus N_2 , O, unterhalb aus N_2 , O_2 . Das Gebiet von 80—130 km bildet den Übergang zwischen beiden Arten der Zusammensetzung. Die Rechnung gibt Ionisationsmaxima bei 250 km (von O herrührend), bei 160 km (von N_2) und bei 90 km (von O_2). Die 3 Schichten werden als F_2 , F_1 und E_1 gedeutet. *Bechert* (Gießen)

Jenkins, F. A., and E. Segrè: The quadratic Zeeman effect. Phys. Rev., II. s. **55**, 52—58 (1939).

Messungen an Linien der Hauptserie von Na und K mit großer Hauptquantenzahl (n) zeigen bei $n = 10$ bis $n = 20$ den Paschen-Back-Effekt und den Einfluß des quadratischen Gliedes. Bei noch größeren n treten Abweichungen auf, die durch den Einfluß des benachbarten F -Termes zu deuten sind. *F. Hund* (Leipzig).

Schiff, L. I., and H. Snyder: Theory of the quadratic Zeeman effect. Phys. Rev., II. s. **55**, 59—63 (1939).

In bezug auf das beobachtete Verhalten des Zeemaneffektes zerfällt der Bereich der Hauptquantenzahl der Linien in der Hauptserie der Alkalien (s. vorsteh. Ref.) in drei Gebiete. Die Rechnung zeigt, daß das Verhalten für kleine n unter Beibehaltung der physikalischen Bedeutung der Quantenzahlen n und l zu verstehen ist; für mittlere n verliert l seine Bedeutung als Drehimpuls; für ganz große n hat auch diese Quantenzahl keinen scharfen Sinn mehr. *F. Hund* (Leipzig).

Tamm, Ig.: Isotope shift of spectral lines and the interaction of neutrons with electrons. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **21**, 106—109 (1938).

Zur Deutung des Isotopieeffektes bei Spektrallinien, für dessen Erklärung der gewöhnliche Masseneffekt — außer bei den leichtesten Kernen (H, Li) — bei weitem nicht ausreicht, nimmt Verf. eine doppelte Ursache an: 1. im Anschluß an Bartlett eine Abhängigkeit des Kernfeldes und damit der Lage der Energieterme vom Kernradius, ein Effekt, der nach Breit zur richtigen Größenordnung der Isotopieverschiebung, aber falschem Gang mit der Ordnungszahl Z führt, und 2. nach einem Vorschlag von Condon eine zusätzliche Wechselwirkung (Anziehung) zwischen den Hüllenelektronen und den Neutronen bzw. Protonen des Kerns, die nach Art der Fermikräfte in einfachster Weise mit einer vorerst unbestimmten Konstanten f angesetzt wird. Die rechnerische Durchführung ergibt für die Isotopieverschiebung den richtigen Gang mit Z , nämlich für die leichten Atome einen negativen und für die schweren Atome einen positiven Effekt. Der Vergleich mit dem experimentellen Zahlenmaterial führt zu einem f -Wert von rund $4 \cdot 10^{-44}$ erg/cm³, welcher um den Faktor 13 kleiner ist als der Wert, den Condon als obere Schranke für f aus der Streuung von langsamen Neutronen gefunden hat. — Zum Schluß weist Verf. auf die Möglichkeit eines merklichen Einflusses der Spinwechselwirkung zwischen den Elektronen und den Kernbestandteilen hin sowie auf die Tatsache, daß bisher noch keine Erklärung für die verschiedene Termverschiebung von Isotopen geraden und ungeraden Atomgewichts gefunden wurde. *Sauter*

Veselov, M.: The influence of internal electrons on the energy of chemical bond. Ž. eksper. teoret. Fis. **8**, 795—804 (1938) [Russisch].

Debye, P. P.: Ein neues Aufnahmeverfahren von Elektroneninterferenzen an einzelnen Molekülen. (Vorl. Mitt.) (Max Planck-Inst., Berlin-Dahlem.) Physik. Z. **40**, 66 (1939).

Bei der Analyse von Elektroneninterferenzaufnahmen wirkt sich der starke Intensitätsabfall mit zunehmendem Streuwinkel ϑ sehr störend aus, welcher von der Elektronenstreuung an den Kernen der Streusubstanz herrührt und bei leichteren

Atomen wie $(\sin \vartheta/2)^{-4}$, bei schwereren etwas langsamer erfolgt. Verf. schlägt vor, diesen Intensitätsabfall durch einen zwischen Streusubstanz und Platte angebrachten rotierenden Sektor zu kompensieren, welcher die Belichtungszeiten für die einzelnen Punkte auf der Platte von innen nach außen entsprechend anwachsen läßt. An den Schwärzungskurven zweier Aufnahmen an CCl_4 , einmal ohne und einmal mit rotierendem Sektor, zeigt Verf., daß im zweiten Fall die im ersten nur schwach angedeuteten Interferenzmaxima sehr deutlich hervortreten.

Sauter

Jabłoński, A.: Über die wellenmechanische Behandlung der Linienverbreiterung. Acta phys. polon. 6, 371—391 (1937).

Es wird eine Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien auf Grund der wellenmechanischen Fassung des Franck-Condotschen Prinzips entwickelt. Dabei werden alle störenden Fremdatome gemeinsam mit dem absorbierenden oder emittierenden Atom als ein Molekül betrachtet. Durch eine Zyklizitätsforderung wird das kontinuierliche Spektrum der translatorischen Energie der Störatome diskret gemacht und die Verwendung von Eigendifferentialen vermieden. Die vorgeschlagene Berechnungsweise für die Intensitätsverteilung der Linie erlaubt die Berücksichtigung der Einfach- und näherungsweise der Mehrfachstöße. Die Auswertung erfordert die Kenntnis der Wechselwirkungsenergie zwischen dem absorbierenden und dem störenden Atom nicht nur in dem Gebiet der van der Waalsschen Anziehung, sondern auch im Gebiet der Abstoßungskräfte; im Falle von Mehrfachstößen ist sogar die Wechselwirkungsenergie der Störatome unter sich zu berücksichtigen, und die numerische Berechnung von sehr vielen Eigenfunktionen, gemischten Übergangswahrscheinlichkeiten und Verteilungsfunktionen nötig, die hier aber nicht durchgeführt wird.

Reinsberg (Bonn).

Jabłoński, A.: Über die wellenmechanische Behandlung der Linienverbreiterung. II. Acta phys. polon. 7, 196—206 (1938).

Aus der vom Verf. entwickelten Theorie (vorsteh. Referat) werden die beiden Grenzformen für die Intensitätsverteilung in einer druckverbreiterten Spektrallinie abgeleitet, die Dispersionsverteilung und die statistische Verteilung. Die Dispersionsverteilung ergibt sich, wenn die Wechselwirkungspotentiale der Stoßpartner für die beiden kombinierenden Zustände des absorbierenden oder emittierenden Atoms nur wenig voneinander verschieden sind und die Relativgeschwindigkeit nicht zu groß ist. Wenn die Relativgeschwindigkeit groß ist, d. h. wenn die de Broglie-Wellenlänge im Vergleich zum optischen Wirkungsquerschnitt klein ist, was um so mehr gilt, je größer die reduzierte Masse ist, ergibt sich die statistische Verteilung.

Reinsberg (Bonn).

Houston, W. V.: Resonance broadening of spectral lines. Phys. Rev., II. s. 54, 884—888 (1938).

Bei der quantenmechanischen Behandlung der Druckverbreiterung von Spektrallinien lassen sich nur approximative Lösungen angeben. Der Verf. zeigt nun, daß die bisher bestehenden Theorien für mittlere und kleine Dichten (die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist groß verglichen mit der mittleren Stoßdauer) verschiedene Approximationen der exakten quantenmechanischen Lösung und deswegen äquivalent sind und erklärt so die Tatsache, daß alle Theorien zu ungefähr dem gleichen Resultat führen. Insbesondere betrachtet der Verf. dann die Verbreiterung der Komponenten eines Multipletts, die er nach dem Verfahren von Furssov und Wlassow behandelt (vgl. dies. Zbl. 15, 381). Die letzteren nehmen an, daß die während eines Vorbeiganges von einem unangeregten an einem angeregten Atom erfolgende strahlungslose Übertragung von Anregungsenergie die Verbreiterung verursache. Die so berechnete Verbreiterung ist für alle Komponenten eines Multipletts gleich. Einen weiteren Beitrag zur Breite liefert die Kopplung der Bewegung des ganzen Atoms und der Elektronenbewegung. Auch die so berechnete Breite ist für alle Komponenten gleich und von derselben Größenordnung wie die erste. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß die beobachteten Werte um den Faktor 5 größer sind als die berechneten.

Dieser Unterschied wird teils durch die Ungenauigkeit der Messung, teils durch Vernachlässigungen in der Rechnung erklärt. *Reinsberg (Bonn).*

Mueller, Hans: Light scattering in anisotropic media. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 267—274 (1938).

Lenz, W.: Das Eigenwertproblem des verdünnten idealen Gases. Ann. Physik, V. F. 33, 630—641 (1938).

Das Eigenwertproblem des idealen Gases wurde in einer früheren Arbeit [Z. Physik 56, 788 (1929)] so gelöst, daß alle Moleküle (starre Kugeln vom Durchmesser a) bis auf eines unregelmäßig verteilt und festgehalten waren. Die Wellenfunktion des einen Moleküls wurde so bestimmt, daß sie im Abstand a vom Mittelpunkt jedes der festgehaltenen Moleküle und an den Wänden des Gefäßes verschwindet. In dieser Arbeit wurden nun alle Moleküle als beweglich vorausgesetzt und das Eigenwertproblem statt im dreidimensionalen im vieldimensionalen Raum gelöst; dazu wurde ein neues Verfahren entwickelt, das in einer Modifikation des Huyghensschen Prinzips besteht. Die früheren Ergebnisse bleiben erhalten, falls die de Broglie-Wellenlänge groß ist gegen den Moleküldurchmesser. *J. Meixner (Gießen).*

Lucas, René: Sur les ondes d'agitation thermique des liquides. J. Phys. Radium, VII. s. 10, 60—74 (1939).

Die thermische Bewegung in einer reibenden Flüssigkeit wird, ähnlich wie es Debye beim festen Körper getan hat, in Longitudinal- und Transversalwellen zerlegt; dabei spielt die innere Reibung für beide Arten von Wellen eine wesentliche Rolle. Die Wellen sind in der Zeit periodisch, aber räumlich gedämpft. Ausgehend von den Grundgleichungen der Hydrodynamik für eine Flüssigkeit mit innerer Reibung wird der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Frequenz und Dämpfung untersucht und die mittlere kinetische und potentielle Energie einer Welle berechnet. Dabei ist wesentlich zwischen Flüssigkeiten mit starker und schwacher innerer Reibung zu unterscheiden. Ist die Grenzfrequenz des Schwingungsspektrums $\ll \nu_v = 3/(8\pi\eta\chi)$ (η = Reibungskoeffizient, χ = Kompressibilität), so ist in der Nähe der Grenzfrequenz für beide Arten von Wellen die mittlere potentielle klein gegen die mittlere kinetische Energie; die Wellen sind fast alle vom Typ der Reibungswellen. Ist dagegen die Grenzfrequenz $\gg \nu_v$, so sind die Wellen alle vom elastischen Typ; die mittlere kinetische ist gleich der mittleren potentiellen Energie. Die mittlere Gesamtenergie einer Welle im thermischen Gleichgewicht für eine Frequenz ν wird gleich $\frac{1}{2}h\nu \left(\frac{h\nu}{ekT} - 1 \right)$ im einen Fall, doppelt so groß im anderen Fall angesetzt. Diese beiden Fälle sind z. B. bei Wasser (große innere Reibung) bzw. bei Quecksilber (kleine innere Reibung) realisiert. Die spezifische Wärme der Reibungswellen in der Nähe des Schmelzpunktes ist bei stark reibenden Flüssigkeiten klein gegenüber der gesamten spezifischen Wärme. Der Unterschied der beiden ist von der Größe der spezifischen Wärme des festen Körpers; man kann vielleicht daraus auf die Existenz eines mikrokristallinen Zustandes schließen. — Die Untersuchung des Strahlungsdrucks der thermischen Flüssigkeitswellen gestattet eine interessante Anwendung auf die Ausdehnungsanomalie des Wassers; sie hängt mit der Druckabhängigkeit der inneren Reibung zusammen. Aus den theoretischen Überlegungen und aus experimentellen Daten kann man abschätzen, daß das Dichtemaximum des leichten Wassers bei etwa 3°C in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung liegt. Ebenso kann man aus dem Dichtemaximum des schweren Wassers bei 11°C schließen, daß die innere Reibung bei Vergrößerung des äußeren Drucks abnehmen muß. Einige Anwendungen auf Anilin und Quecksilber zeigen auch hier die Brauchbarkeit der theoretischen Überlegungen. *J. Meixner (Gießen).*

Lyddane, R. H., and K. F. Herzfeld: Lattice vibrations in polar crystals. Phys. Rev., II. s. 54, 846—861 (1938).

Die Arbeit, die sich mit den freien Schwingungen eines polaren Gitters vom NaCl-Typ befaßt, summiert die Coulombkraft nach Art der Madelungschen Methode

über einen Bornschen „periodischen Kristallblock“. Zur numerischen Rechnung wird eine abstoßende Kraft mit exponentiellem Abfall angenommen. Van der Waals'sche Kräfte werden vernachlässigt. — Die Verff. diskutieren besonders die kurzen, der Gitterkonstanten vergleichbaren Wellenlängen; im langwelligen Gebiet beseitigen sie einige Unklarheiten, die bezüglich des Einflusses der Randbedingungen und des Zusammenhangs zwischen erregender Feldstärke F und Polarisierung P bisher bestanden. Für sehr lange Wellen erweist sich dieser Zusammenhang als vieldeutig, was sich physikalisch aber leicht aufklärt: Je nach der Summationsfolge der nur bedingt konvergierenden Coulombpotentiale unterscheidet man dem periodischen Kristall unterschiedliche „Randbedingungen“, wie durch Beispiele aus der Kontinuums-theorie belegt wird. Erst für Wellen klein gegen die Blockdimensionen stellt sich (im opt. Zweig) unabhängig von der Blockform die bekannte Lorentz-Lorenz-Kraft $F = 4\pi P/3$ ein, jedoch nur für die transversalen Wellen, während für die longitudinalen das überraschende Resultat $F = 8\pi P/3$ gefunden wird. *H. Ott* (Würzburg).

Jensen, Peter: Die magnetische Suszeptibilität von Kaliumbromidkristallen mit Farbzentren. *Ann. Physik*, V. F. 34, 161—177 (1939).

Die Annahme, daß die Farbzentren „neutrale Alkaliatome sind, die lose im Kristallinnern gebunden sind“, wird durch Messung der Suszeptibilität der Farbzentren gestützt. *J. Meixner* (Gießen).

Sauter, Fritz: Zur Theorie des elektrischen Widerstandes guter Leiter. *Naturwiss.* 27, 109—110 (1939).

Es gelingt, die mathematisch unangenehme Blochsche Integralgleichung in der Theorie der metallischen Leitfähigkeit durch eine zweckmäßige Näherung zu umgehen. Sie besteht darin, daß man die Zahl der Elektronen, die Streuprozesse an den Gitterschwingungen erleiden, formal für alle Temperaturen proportional zur absoluten Temperatur setzt (was eigentlich nur für hohe Temperaturen richtig ist) und den Fehler dadurch wieder ausgleicht, daß man die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines Elektrons an einer Gitterwelle mit Absorption bzw. Emission eines Schallquants durch Hinzufügen eines geeigneten Faktors abändert. Es ergibt sich so die Gültigkeit der sog. Grüneisenschen Widerstandsformel, die Bloch für hohe und für tiefe Temperaturen abgeleitet hat, auch im Zwischengebiet. *J. Meixner* (Gießen).

Bardeen, J., and J. H. van Vleck: Expressions for the current in the Bloch approximation of „tight binding“ for metallic electrons. *Proc. nat. Acad. Sci., Wash.* 25, 82—86 (1939).

Für Elektronen in einem periodischen Potentialfeld kann man den Strom in einem Zustand mit der Wellenzahl \mathfrak{k} entweder durch

$$j = -\frac{e\hbar}{2mi} \int (\psi_{\mathfrak{k}}^* \text{grad} \psi_{\mathfrak{k}} - \psi_{\mathfrak{k}} \text{grad} \psi_{\mathfrak{k}}^*) d\tau \quad (1) \quad \text{oder durch} \quad j = -\frac{e}{\hbar} \text{grad}_{\mathfrak{k}} E(\mathfrak{k}) \quad (2)$$

($\text{grad}_{\mathfrak{k}}$ im Raum der Wellenzahlen) ausdrücken. Beide Darstellungen müssen für die exakte Lösung der Schrödingergleichung dasselbe geben. Geht man jedoch von weit entfernten wasserstoffähnlichen Atomen mit Eigenfunktionen $e^{-\alpha r}$ aus und berechnet die Eigenfunktionen im periodischen Feld mit der sog. Annäherung von gebundenen Elektronen her, so ist (1) gerade ein Drittel von (2). Diese Schwierigkeit tritt jedoch nicht auf, wenn nicht das Coulombsche Potential, sondern ein abgeschirmtes Potential für das Valenzelektron im freien Atom benutzt wird. *J. Meixner* (Gießen).

Smirnov, A.: The application of Peterson and Nordheim's method to the theory of the electrical resistance of solid solutions. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 8, 810—817 (1938) [Russisch].

Blokhintzev, D., and B. Spasskij: The generalisation of the Wilson theory of semiconductors. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 8, 945—947 (1938) [Russisch].

Frenkel, J.: On the theory of electric breakdown of dielectrics and electronic semiconductors. *Techn. Physics USSR* 5, 685—695 (1938).

In starken elektrischen Feldern erhalten die Elektronen in Isolatoren und Halb-

leiten eine höhere Beweglichkeit durch Erniedrigung der Potentialschwelle zwischen benachbarten Atomen, die bis zum Durchschlag führt: 1. durch Berücksichtigung des Tunneleffekts, 2. durch die erhöhte thermische Ionisierung. Der zweite Effekt herrscht vor für Temperaturen oberhalb größenordnungsmäßig 60° K und ist in befriedigender Übereinstimmung mit Messungen der Durchschlagsfeldstärke und des Verhaltens der Leitfähigkeit für kleinere Feldstärken in Abhängigkeit von der Temperatur. *Meizner*.

Miyahara, Syôhei: Ferromagnetism of semi-conductors. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 105 (1939).

Mit der Annahme, daß in einem Halbleiter zwei benachbarte Energiebänder mit geringem Abstand vorhanden sind, von denen am absoluten Nullpunkt das untere besetzt, das obere leer ist, läßt sich zeigen, daß Ferromagnetismus auftreten kann, wenn im unteren Band die Austauschintegrale große positive Werte haben. Die spontane Magnetisierung verschwindet unterhalb einer Temperatur T_1 , steigt dann rasch zu einem Maximum an und ist oberhalb einer Temperatur T_2 wieder gleich Null. *J. Meizner* (Gießen).

Blokhintzev, D., and B. Davydov: Some contributions to the theory of solid rectifiers. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 21, 21—24 (1938).

Der Durchgang eines elektrischen Stromes durch die Kontaktstelle zweier Halbleiter wird untersucht. Haben die beiden Halbleiter verschiedenen spezifischen Widerstand, so ist auch das elektrische Feld, das den Strom aufrechterhält, beiderseits des Kontaktes verschieden, und die Kontaktstelle selbst trägt eine Flächenladung. Bei elektronentheoretischer Betrachtung ist die Flächen- durch eine Raumladung zu ersetzen, der Widerstand und die Feldstärke ändern sich nicht mehr sprunghaft, sondern stetig. Der gesamte Widerstand des Kontaktes ergibt sich als von der Stromrichtung abhängig, der Kontakt wirkt also als Gleichrichter oder Detektor. *Maue*.

Casimir, H. B. G.: On the equilibrium between spin and lattice. *Physica*, Haag 6, 156—160 (1939).

Die magnetischen Relaxationserscheinungen werden unter der Vorstellung behandelt, daß das System der Gitterschwingungen und das der magnetischen Momente (Spins) als zwei gesonderte, im thermodynamischen Gleichgewicht befindliche Systeme mit zwei eigenen Temperaturen T_g und T_s betrachtet werden können, zwischen denen im Fall einer endlichen Temperaturdifferenz eine dieser Differenz proportionale Energieübertragung stattfindet. Der Unterschied der vorliegenden Arbeit gegenüber früheren ähnlichen Untersuchungen besteht darin, daß für beide Systeme endliche spezifische Wärmen in Rechnung gesetzt werden, während bisher stets die spezifische Wärme des Gittersystems als sehr groß gegenüber der des Spinsystems angenommen wurde ($T_g = \text{konstant}$). Verf. zeigt, daß diese Annahme nicht zu Recht besteht, da C_g etwa hundertmal so groß wie C_s ist. Bei richtiger Rechnung erhält man einen Wert für die Relaxationszeit, der ungefähr hundertmal kleiner als der bisher berechnete und von der Größenordnung 10^{-4} sec ist. *Sauter*

Migdal, A.: Scattering of neutrons in ferromagnetics. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 20, 551—553 (1938).

Verf. weist auf eine Unrichtigkeit in der Blochschen Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Streuung von Neutronen an magnetischen Atomen hin. Bei richtiger Rechnung gelangt man unabhängig davon, ob man den Atommagneten als Kreisstrom oder Dipol auffaßt, zu der von Schwinger für diesen Querschnitt angegebenen Formel. *Sauter*

Pomeranchuk, I.: On the scattering of slow neutrons in a crystalline lattice. *Ž. exper. teoret. Fis.* 8, 894—906 (1938) [Russisch].

Westerfield, E. C.: Thermal dilatation of superconductors. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 319 (1939).

Frühere Versuche von McLennan, Allen und Wilhelm über die thermische Ausdehnung von Supraleitern schienen zu zeigen, daß sich der Ausdehnungskoeffizient

(A.K.) am Sprungpunkt stetig verhält. Tatsächlich lassen jedoch die Versuchsergebnisse — worauf Verf. hinweist — eine kleine Unstetigkeit des A.K. erkennen, die gerade noch im Bereich der Meßgenauigkeit liegt. *Maue* (München).

Kramer, J.: Die Supraleitfähigkeit und die amorphe Metallmodifikation. *Z. Physik* **111**, 423—436 (1939).

Der Übergang eines Metalles vom supraleitenden in den nichtsupraleitenden Zustand und der Übergang eines Metalles aus der amorphen in die kristalline Modifikation werden gegenübergestellt. An Hand der vorhandenen Beobachtungen wird gezeigt, daß die Sprungtemperatur der Supraleitung und die Umwandlungstemperatur aus der amorphen in die kristalline Modifikation in qualitativ gleicher Weise von Druck, Magnetfeld und Metallart abhängen. Hieraus wird auf eine gemeinsame Ursache beider Übergänge geschlossen, die in einer Ionisierung der Metallatome liegen soll. Die Übergangstemperatur ist hiernach durch die Ionisierungsenergie der Atome bestimmt, von der sich verstehen läßt, daß sie in dem durch die Beobachtungen geforderten Sinne von Dichte und Magnetfeld abhängt. Ein zwischen der magnetischen Schwellenwertkurve der Supraleitung und der Debyeschen Atomwärme behaupteter Zusammenhang ist nach Ansicht des Ref. abwegig, da die Debyesche Atomwärme nicht den Elektronen zugeführt wird. *Maue* (München).

Sergeev, M.: The optical properties of metals on the basis of the density matrix. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **8**, 948—958 (1938) [Russisch].

Cashman, R. J., and Else Bassoe: Surface and volume photoelectric emission from barium. *Phys. Rev.*, **II. s.** **55**, 63—69 (1939).

Der Volumenphotoeffekt wurde auch unter besonders sorgfältigen experimentellen Bedingungen festgestellt. *J. Meixner* (Gießen).

Ewald, P. P.: The force of excitation in the theory of dispersion. *Phys. Rev.*, **II. s.** **54**, 893—894 (1938).

Um die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in einem Kristall zu beschreiben, wird in der klassischen Physik jedes Atom durch einen Dipol mit dem Moment $p = \alpha \mathcal{E}$ (α = Polarisierbarkeit) ersetzt. Die exakte Bestimmung des elektrischen Vektors \mathcal{E} ist eine grundsätzliche Schwierigkeit, die bei der Berechnung optischer Eigenschaften von Kristallen noch zu überwinden ist und bei der Übersetzung des Problems in die Wellenmechanik erhalten bleibt. Der Verf. gibt hier zwei Möglichkeiten, auf die eine wellenmechanische Theorie aufgebaut werden kann. — Die Wellenfunktionen eines Kristalls werden gewöhnlich berechnet unter der Voraussetzung, daß keine äußeren, z. B. elektromagnetischen Kräfte wirken. Die sich hieraus für jede Gitterzelle ergebenden Dipolmomente sind in optischer Hinsicht unwirksam. Erst wenn eine elektromagnetische Welle im Gitter auftritt, ergeben sich für jede Zelle optisch wirksame Dipolmomente. Folglich muß man in nullter Näherung bereits von einem Hamiltonschen Operator ausgehen, der die Wechselwirkung des Kristalls und des elektromagnetischen Feldes schon enthält. Erst spätere Approximationen ergeben den Einfluß, den die Welle auf das Atom ausübt. Eine näherungsweise Berechnung ist möglich, wenn der Kristall klassisch und nur die Polarisierung wellenmechanisch behandelt wird. Bei ihrer Berechnung ist zu beachten, daß jedes Atom schon von vielen Nachbarn umgeben ist. *Reinsberg* (Bonn).

Motz, Lloyd, and Eugene Feenberg: The spacing of energy levels in light nuclei. *Phys. Rev.*, **II. s.** **54**, 1055—1059 (1938).

Für ein Kernmodell von unabhängigen Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential wird die mittlere Dichte der Energieniveaus für Atomgewichte $A \leq 16$ und Anregungsenergien bis 23 MeV berechnet; die Abhängigkeit der potentiellen Energie vom Symmetriecharakter wird halbempirisch bestimmt. Am häufigsten sind die Energieniveaus mit dem Gesamtdrehimpuls $L = 2$ (D -Zustände) bzw. mit dem Gesamtdrehimpuls $F = 2$ für gerade A und $F = 5/2$ für ungerade A . Die Dichte der Energieniveaus nimmt mit A nicht monoton zu. In der Reihe $A = 4n$ ist die

Dichte für $|N - Z| = 2$ (N = Zahl der Neutronen, Z der Protonen im Kern) wesentlich größer als für $N = Z$; umgekehrt in der Reihe $A = 4n + 2$. Für ungerades A ist die Dichte bis zu einer Anregungsenergie von 20 MeV von $|N - Z|$ praktisch unabhängig, um für höhere Anregungsenergien mit $|N - Z|$ zuzunehmen. Ausführliche Tabellen.

J. Meizner (Gießen).

Horvay, Gabriel: On the iteration method and its application to the oxygen problem. Phys. Rev., II. s. 55, 70—87 (1939).

Das Iterationsverfahren besteht darin, daß eine lineare Kombination Ψ der Funktionen $\Psi_0, H\Psi_0, H^2\Psi_0, \dots, H^n\Psi_0$ so gewählt wird, daß $\int \Psi^* H \Psi d\tau$ möglichst klein wird (obere Grenze für die Energie des Grundzustandes) mit der Nebenbedingung $\int \Psi^* \Psi d\tau = 1$. Ψ_0 ist eine geeignet gewählte Ausgangsfunktion, die von den Koordinaten der einzelnen Teilchen des Kerns abhängt, H ist der Hamiltonoperator. Das Verfahren konvergiert langsam, es läßt sich aber eine gute Abschätzung der Bindungsenergie angeben. Anwendung auf den ^{16}O -Kern liefert mit der üblichen Wechselwirkung der Kernteilchen (Wigner- und Majoranakräfte) eine Bindungsenergie von $230 \pm 20 \text{ mc}^2$ und einen endlichen Radius, gegenüber einer Bindungsenergie von 220 mc^2 für vier freie α -Teilchen. Das spricht für die qualitative Richtigkeit der angenommenen Kernkräfte. Eine Reihe von interessanten Einzelheiten der Methode werden auseinandergesetzt.

J. Meizner (Gießen).

Kroeger, W. J.: The binding energy of O^{16} . Phys. Rev., II. s. 54, 1048—1053 (1938).

Die Bindungsenergie des O^{16} -Kerns wurde nach einem Störungsverfahren berechnet. Als Eigenfunktionen nullter Ordnung wurden Oszillatoreigenfunktionen (mit dem zugehörigen Hilfspotential für die Kernkräfte) gewählt. Die Abweichung dieses Hilfspotentials von den wirklichen Kernkräften wurde dann als „Störung“ betrachtet und die Bindungsenergie nach dem üblichen wellenmechanischen Störungsverfahren in höheren Näherungen berechnet. Ergebnis: 1. Näherung: 19 mc^2 ; 2. Näherung: 79 mc^2 ; 3. Näherung: „disturbingly large, perhaps half of the second order contribution but of opposite sign.“ Trotzdem glaubt der Verf. an die Konvergenz des Verfahrens und schätzt als obere Grenze der Bindungsenergie 80 mc^2 ab. Danach würde die Diskrepanz gegenüber dem experimentellen Wert von etwa 250 mc^2 nicht an der Unzulänglichkeit des Näherungsverfahrens liegen, sondern der bisherige Ansatz für die Kernkräfte — so gewählt, daß die Daten der Streuversuche und die Bindungsenergie von H^2 und He^4 richtig wiedergegeben werden — würde nicht ausreichen, um die starke Bindung des O^{16} -Kerns zu erklären.

H. Jensen (Hamburg).

Krüger, Hubert: Über die Anreicherung des N^{15} -Isotops und einige spektroskopische Untersuchungen am N^{15} . Z. Physik 111, 467—474 (1939).

Mit der von G. Hertz angegebenen Methode der Isotopentrennung wurde N^{15} im Verhältnis $\text{N}^{14} : \text{N}^{15} = 4 : 1$ angereichert. Die N_2^{15} -Banden zeigen einen Intensitätswechsel, der auf Fermistatistik für den N^{15} -Kern schließen läßt; der Kernspin ist wahrscheinlich $1/2\hbar$.

Bechert (Gießen).

Mattauch, J., und H. Lichtblau: Ein bemerkenswertes Isotop des Cassiopeiums. Z. Physik 111, 514—521 (1939).

Die Verff. untersuchten im Massenspektrographen das Cassiopeium ($Z = 71$) auf das von Gollnow [Z. Physik 103, 443 (1936)] entdeckte neue Isotop hin. Es besitzt die Massenzahl 176, entgegen früheren Erwartungen [Cp^{177} nach Hönigschmid, Naturwiss. 25, 748 (1937)]. Das Häufigkeitsverhältnis ist $\text{Cp}^{176} : \text{Cp}^{177} = 100 : 2,58 \pm 0,07$. Daraus berechnen die Verff. das chem. Atomgewicht $174,995 \pm 0,01$, unter Zugrundelegung der neuen Packungsanteilkurve Dempsters [Physic. Rev. 53, 869 (1938)], die bei den schwereren Elementen merklich von der bisherigen abweicht. Der kürzlich von Hönigschmid (l. c.) chemisch bestimmte Wert ist 174,99. Verff. erblicken in dieser ausgezeichneten Übereinstimmung eine Bestätigung der Dempsterschen Packungsanteile. (Mit den alten Werten würde sich das chem. Atomgewicht 174,93 ergeben

haben.) Cp_{71}^{176} ist nach K_{19}^{40} der einzige in der Natur vorkommende schwerere Kern, der bei gerader Massenzahl eine ungerade Protonen- und Neutronenzahl besitzt. Die zu Cp_{71}^{176} benachbarten isobaren Kerne Hf_{72}^{176} und Yb_{70}^{176} sind als stabil bekannt; aus dem Mattauschischen Gesetz [Z. Physik **91**, 361 (1934)], nach dem von zwei zueinander benachbarten Isobaren nur eines stabil sein kann, ist deshalb die Instabilität des Cp_{71}^{176} zu folgern. Seine β -Aktivität konnte von Heyden und Wefelmeier tatsächlich nachgewiesen werden [Naturwiss. **26**, 612 (1938)]. Dies ist der erste Fall, in dem auf Grund theoretischer Überlegungen nach einer natürlichen β -Aktivität gesucht und diese gefunden wurde.

H. Jensen (Hamburg).

Schüler, H., und H. Gollnow: Anhang zur vorstehenden Mitteilung. Z. Physik **111**, 521—522 (1939).

Cp_{71}^{176} ist der einzige schwerere Kern mit gerader Masse und ungerader Protonen- und Neutronenzahl, dessen Häufigkeit groß genug ist, um ihn spektroskopisch neben seinem Isotop Cp^{175} zu untersuchen. Da er gerade Teilchenzahl besitzt, wird er nicht, wie in der ursprünglichen Arbeit Gollnows [Z. Physik **103**, 443 (1936)] angenommen, halbzahligen, sondern ganzzahligen Spin haben. Dieser ist nach den vorliegenden Messungen sicher größer als $3\hbar$, während die am Anfang des periodischen Systems stehenden Kerne dieses Typus alle nur den Spin $1\hbar$ haben. Eine genaue Bestimmung des Spins ist in Aussicht gestellt. Das magnetische Moment ist größer als drei Kernmagnetonen. Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß Cp^{175} das größte bisher gefundene Quadrupolmoment ($q = +5,9 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, verlängerter Kern) besitzt, und vermutet, daß dieses das große Bahnmoment des Cp^{176} möglich machen könnte.

H. Jensen (Hamburg).

Goldstein, L.: Sur le mécanisme statistique des collisions nucléaires. J. Phys. Radium, VII. s. **10**, 23—29 (1939).

Von Tomonaga [Z. Physik **110**, 573 (1938)] durchgeführte quantitative Betrachtungen über die Entstehung des Bohrschen Zwischenzustands („Compoundkern“) bei Kernprozessen auf Grund der Berechnung der Wärmeleitung und inneren Reibung der Kernmaterie gestatten wegen analytischer Schwierigkeiten nicht, geschlossene Ausdrücke für die betr. Koeffizienten anzugeben. Verf. schlägt deshalb einen indirekten Weg ein zur „einfachen, wenn auch groben“ Berechnung der betr. Koeffizienten auf Grund der Vorstellung eines Neutronen- und Protonengases. Für die freien Weglängen der Teilchen wird dabei angenommen, daß sie zwischen den Grenzen Kerndurchmesser und mittl. Teilchenabstand liegen. Wie Verf. ausführt, sollten die so gewonnenen Abschätzungen eine untere Grenze für die Viskosität und eine obere Grenze des Wärmeleitungskoeffizienten darstellen. Die mittlere Zeitdauer für den Übergang vom Anfangszustand (Kern + stoßendes Teilchen) zum Bohrschen Zwischenzustand ist von der Größenordnung der Zeit, die das Teilchen zum Passieren des Kernvolumens brauchen würde.

H. Jensen (Hamburg).

Gurevich, I.: On the method of determining the energy spectrum of fast neutrons. Ž. eksper. teoret. Fis. **8**, 791—793 u. engl. Zusammenfassung 794 (1938) [Russisch].

Lifshitz, E.: The collisions of deuterons with nuclei. Ž. eksper. teoret. Fis. **8**, 930—944 (1938) [Russisch].

Weizsäcker, C. F. v.: Zum Wefelmeierschen Modell der Transurane. Naturwiss. **27**, 133 (1939).

Quantitative Verfolgung der Vermutung Wefelmeiers [Naturwiss. **27**, 110 (1939)], daß bei hohen Kernladungen eine verlängerte Gestalt des Kerns gegenüber der Kugelgestalt (bei gleichem Volumen) energetisch günstiger wird. Als Gestalt wird ein Rotationsellipsoid variabler Elliptizität angesetzt. Die Oberflächenkräfte versuchen die Elliptizität zu verringern, die Coulombschen Kräfte sie zu vergrößern. Die Energieausdrücke lassen sich analytisch angeben, und die Gleichgewichtskonfiguration ist zu bestimmen. Die Konstante der Oberflächenspannung wird aus v. Weizsäckers halb-

empirischer Formel der Kernenergie entnommen. Etwa bei $Z = 100$ hört die Kugel auf, eine stabile Gleichgewichtsfigur zu sein, es ist dort nur noch ein Ellipsoid mit $\epsilon > 0,98$ „stabil“; dieses wird jedoch vermutlich spontan in zwei Bruchstücke aufspalten. Dies gibt die Möglichkeit einer Erklärung des von Hahn und Straßmann [Naturwiss. 27, 11 (1939)] beobachteten Zerplatzens des Urans in zwei große Bruchstücke beim Beschießen mit langsamen Neutronen. *H. Jensen* (Hamburg).

Emitriev, N.: Heavy particles emitted by nuclei in the process of the formation of artificial radioactive elements by neutron bombardment. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 8, 779—790 (1938) [Russisch].

Zavelsky, A.: On the upper limit of the β -spectrum of ThC'' and ThB . *Phys. Rev.*, II. s. 55, 317 (1939).

Verschiedene Verfasser haben versucht, den Unstimmigkeiten von Experiment und Theorie betreffs der kontinuierlichen β -Spektren abzuhelpen durch die Annahme einer von Null verschiedenen Neutrino-Ruhmasse μ_0 , zu berechnen als

$$\mu_0 = W_0 - \frac{E_0}{511} + 1$$

aus der nach Uhlenbeck-Konopinski extrapolierten Grenzenenergie W_0 und der wirklichen Grenzenenergie E_0 des β -Spektrums (W_0 ausgedrückt in Vielfachen der Elektronen-Ruhenergie mc^2 ; und E_0 ausgedrückt in kV). Es wird auf Grund der experimentellen Daten für ThC'' und ThB (nach Alichanian und Zavelsky) erläutert, daß auch auf diese Weise keine befriedigende theoretische Deutung gegeben werden kann.

P. Jordan (Rostock).

Solomon, Jacques: Note sur la masse du neutrino. *J. Phys. Radium*, VII. s. 10, 104 (1939).

Diskussion der schon verschiedentlich erörterten Möglichkeit, durch Annahme einer von Null verschiedenen Neutrino-Ruhmasse die fehlende genaue Übereinstimmung zwischen theoretischen und empirischen β -Spektren herzustellen. Die bekannte Tatsache, daß sich dann für verschiedene β -Strahler verschiedene Neutrinomassen μ ergeben ($\mu = 0,4 m$ für ^{32}P ; $\mu = 0,8 m$ für ThC ; $\mu = 0,3 m$ für RaE ; dabei $m =$ Elektronenmasse), möchte der Verf. als Hinweis darauf ansehen, daß beim Neutrino die übliche Beziehung des Energie-Impulsvektors zur Ruhmasse ungültig sei. — Danach würde jedoch vorläufig jede theoretische Diskussionsgrundlage für den β -Zerfall fortfallen.

P. Jordan (Rostock).

Bethe, H. A., F. Hoyle and R. Peierls: Interpretation of beta-disintegration data. *Nature*, Lond. 143, 200—201 (1939).

Nach kurzer Zusammenfassung der Schwierigkeiten der Uhlenbeck-Konopinski'schen Fassung der Theorie des β -Zerfalls erörtern die Verf. die Möglichkeit, zu der ursprünglichen einfacheren Fassung Fermis zurückzukehren. Zur Wiedergabe der experimentellen Energieverteilung der Zerfallselektronen muß man dann annehmen, daß letztere nicht ein einfaches Fermisches Spektrum darstellt, sondern eine Überlagerung mehrerer solcher Fermiverteilungen mit verschiedenen Grenzenenergien. Es gelingt das experimentelle Spektrum für B^{12} , F^{20} , F^{17} , N^{13} und O^{15} bereits durch je zwei Fermispektren darzustellen. Aus den Differenzen der Grenzenenergien läßt sich dann die Energie der γ -Quanten berechnen, die bei dieser Interpretation die β -Zerfallsprozesse begleiten müßten. Bei N^{13} und F^{20} ist tatsächlich γ -Strahlung der richtigen Härte beobachtet worden, bei B^{12} und F^{17} wahrscheinlich gemacht. *Jensen*.

Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXXII.: Particles of the cosmic rays. *Bell Syst. techn. J.* 18, 190—217 (1939).

Wilson, Volney C.: The nature of the penetrating cosmic rays. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 6—10 (1939).

Mit geeigneter Zählrohranordnung wurde die Höhenstrahlung zwischen 30 und 300 m Wasseräquivalenz, vom Rand der Atmosphäre an gerechnet, untersucht. Die

beobachteten Strahlen sind immer durchdringende Teilchen, begleitet von weichen Schauern; das Verhältnis der weichen Schauer zur harten Komponente nimmt mit der Tiefe zu. — Versuche zu Folgerungen aus der Theorie des Barytrons. *Jensen.*

Thompson, Julian L.: A critical analysis for sidereal time variations of cosmic rays on the Pacific. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 11—15 (1939).

Nach Ausscheidung von Fehlermöglichkeiten, die einen Effekt vortäuschen konnten, ergab die Analyse der Messungen von Compton und Turner, daß keine Schwankungen der Höhenstrahlung mit der Periode eines Sternentages vorliegen. *Jensen.*

Caldirola, Piero: Sull'equazione ondulatoria e sulla dinamica di una particella nella teoria della relatività. *Nuovo Cimento*, N. s. 15, 467—472 (1939).

Die Absicht der Arbeit ist, für die Diracgleichung den Übergang zur klassisch-mechanischen Gleichung zu untersuchen. In der Arbeit wird falsch differenziert; die Behandlung des Falles, in dem eine Potentialkraft auf das Teilchen wirkt, ist physikalisch unrichtig. Die Frage ist in der Literatur bereits richtig behandelt [W. Pauli, *Helv. Physica Acta* 5, H. 3, 179 (1932); K. Bechert, ebenda 6, H. 1, 82 (1933)]. *Bechert (Gießen).*

McCrea, W. H.: On the representation of Eddington's E -numbers by matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35, 123—125 (1939).

Die Eddingtonschen E -Zahlen sind gegeben durch $T = it_{16} + \sum t_{\mu\nu} E_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \mu \neq \nu$), worin $t_{\mu\nu}$ Zahlenkoeffizienten sind, dagegen $E_{\mu\nu}$ hyperkomplexe Zahlen, für welche gilt: $E_{\mu\nu} E_{\mu\nu} = -1$; $E_{\mu\nu} = -E_{\nu\mu}$; $E_{\mu\nu} E_{\mu\sigma} = E_{\nu\sigma}$; $E_{\mu\nu} E_{\sigma\tau} = \pm i E_{\lambda\varrho}$, wobei $\mu, \nu, \sigma, \tau, \lambda, \varrho$ alle verschieden, und das Vorzeichen \pm , je nachdem $\mu\nu\sigma\tau\lambda\varrho$ eine gerade oder ungerade Permutation von 012345 ist. Eddington stellt die allgemeine E -Zahl durch eine vierreihige Matrix dar, deren Elemente Linearkombinationen der $t_{\mu\nu}$ sind. Verf. gibt statt dessen eine Darstellung durch eine 16reihige Matrix an, deren Elemente die einzelnen $t_{\mu\nu}$ sind. Daher kann man die Koeffizienten $t_{\mu\nu}$ eines Produkts zweier E -Zahlen nach den Gesetzen der Matrizenmultiplikation erschließen. *Walter Franz*

Serpe, J.: Sur la théorie de l'émission β de Wentzel. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 8, 51—56 (1939).

Il est montré que la théorie de l'émission β de Wentzel (voir ce Zbl. 15, 380 et 16, 429) amène à la même difficulté que la théorie originale de Fermi: Si l'on choisit les constantes introduites dans la théorie de sorte que la vie moyenne des éléments radioactifs aye le bon ordre de grandeur, la force entre les neutrons et les protons devient 10^{18} fois trop petite. Le même effet se retrouve pour le moment magnétique des particules lourdes. (Ces résultats ne sont nullement surprenants: Dans la théorie de Wentzel aussi bien que dans celle de Fermi, les forces d'interaction entre deux particules lourdes n'apparaissent que dans une approximation plus haute que celle dans laquelle le rayonnement β se manifeste. Nous rappelons que la théorie actuelle des forces nucléaires, due à Yukawa, résoud cette difficulté: La décomposition β , comme les forces nucléaires se manifeste dans la même [seconde] approximation [Yukawa, voir ce Zbl. 10, 432].) *Stueckelberg (Genf).*

Géhéniau, Jules: Remarques sur les densités de matrices et les grandeurs non maxwelliennes en théorie du photon. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 208, 497—499 (1939).

Betrachtungen zur de Broglieschen Theorie des Photons. Die Tatsache, daß nach dieser Theorie das elektromagnetische Feld nicht den Maxwellschen Gleichungen gehorcht bzw. daß außer Lösungen der Maxwellschen Gleichungen auch noch andere Felder („non maxwelliens“) auftreten, sucht der Verf. mit der Erfahrung in Einklang zu bringen durch die Annahme, daß diese letzteren keine Wechselwirkung mit der Materie besitzen. *P. Jordan (Rostock).*

Petiau, Gérard: Sur les équations électromagnétiques de la théorie du photon. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 208, 167—169 (1939).

Verf. zeigt, daß man von der Diracgleichung eines kräftefreien Teilchens zu einer Art Maxwellgleichungen gelangt, wenn man die Wellenfunktion als Linearkombination der 16 aus den Diracoperatoren ableitbaren linear unabhängigen Grundgrößen ansetzt

und bestimmte Koeffizienten hiervon als V , \mathcal{U} , \mathcal{E} und \mathcal{S} bezeichnet. An die Stelle der Stromdichte i in der einen Maxwellgleichung tritt der Vektor $\pi\mu_0^2c^3\mathcal{U}/h^2$, wobei μ_0 die Ruhemasse des Teilchens ist, und an die Stelle der Ladungsdichte $\pi\mu_0^2c^2V/h^2$.

Sauter

Solomon, Jacques: Gravitation et quanta. J. Phys. Radium, VII. s. 9, 479—485 (1938).

Betrachtungen zur Frage, ob man ohne Widerspruch von Newtonscher Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen reden kann. Verf. zweifelt daran, daß sich die jetzige Quantentheorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie unter einen Hut bringen läßt. Betrachtungen über die Beziehung atom- und kernphysikalischer Größen zur Ausdehnung des Weltalls.

Bechert (Gießen).

Fock, V.: Further criticism on the neutrino theory of light. Ž. eksper. teoret. Fis. 8, 771—778 (1938) [Russisch].

Sokolow, A.: Zur Möglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes. Physica, Haag 5, 797—810 (1938).

Verf. gibt einen systematischen Aufbau der Neutrinotheorie des Lichtes in der vom Ref. und Kronig entwickelten Form. Über die bisherigen Resultate hinausgehend vermag der Verf. auch die longitudinalen, den Coulombkräften entsprechenden Anteile des elektromagnetischen Feldes auf das Neutrinofeld zurückzuführen. Die charakteristische Eigentümlichkeit der Theorie, daß die ebenen Lichtwellen einer bestimmten Fortschrittsrichtung nur aus den ihr exakt parallel laufenden Neutrino-Wellen (aber doch in bilinearer Form, und unter Heranziehung aller Neutrinofrequenzen für je eine bestimmte Lichtfrequenz) aufgebaut werden, macht der Verf. der analytischen Behandlung zugänglicher durch einen Grenzübergang, in welchem die Neutrino-Ruhmasse zunächst ungleich Null genommen wird und dann zu Null geht. Auf diesem Wege sucht Verf. auch die Schwierigkeiten zu überwinden, die sich bislang betreffs der von Kronig erstrebten lorentzinvarianten Formulierung der Theorie ergaben. P. Jordan.

Fierz, Markus: Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. Helv. phys. Acta 12, 3—37 (1939) u. Zürich: Diss. 1939.

Les équations des champs correspondant à des particules libres de masse $m = \hbar\kappa/c$ et de spin $f \cdot \hbar$ peuvent s'écrire, pour f entier:

$$\square A_{ik\dots l} = \kappa^2 A_{ik\dots l}, \quad A_{ii\dots l} = 0, \quad \partial A_{ik\dots l}/\partial x_i = 0$$

où $A_{ik\dots l}$ est un tenseur symétrique de rang f ; et pour f demi-entier

$$p^{\nu e} a_{\delta}^{\dot{\nu}\dot{\mu}\dots} = \kappa b_{\delta}^{\dot{\nu}\dot{\mu}\dots}, \quad p_{\nu e} b_{\delta}^{\dot{\nu}\dot{\mu}\dots} = \kappa a_{\delta}^{\dot{\nu}\dot{\mu}\dots}, \quad \varepsilon_{\nu\dot{\mu}} p^{\nu e} a_{\delta}^{\dot{\nu}\dot{\mu}\dots} = 0$$

où a et b sont des spineurs symétriques par rapport aux indices pointés et non-pointés,

a ayant $\begin{cases} 2k \\ 2l-1 \end{cases}$ indices ($2k+2l-1=2f$) et $\varepsilon_{\lambda\dot{\mu}}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. — On rattache

ces champs au spin f en montrant que, pour une masse m non nulle, à chaque vecteur de propagation donné, correspondent $2f+1$ ondes planes linéairement indépendantes et différant par l'orientation du spin. — L'auteur donne les expressions susceptibles de représenter l'énergie et la charge et montre que, pour f entier, il existe f expressions possibles de la densité d'énergie, conduisant toutes à la même énergie totale. Cette dernière est toujours positive; la densité elle-même ne l'est que si $f \leq 1$. Le courant peut être positif ou négatif. Dans le cas $f =$ demi-entier, il existe $f+1/2$ possibilités de définir la densité de courant, conduisant toutes à la même valeur du courant total; l'énergie peut être positive ou négative. — L'auteur écrit dans les deux cas les relations de commutation sous forme invariante, et montre qu'on ne peut quantifier le champ des particules à spin entier suivant Fermi-Dirac, sans renoncer au caractère infinitésimal des relations de commutation. La raison essentielle qui rattache les particules à spin entier à la statistique de Bose-Einstein et celles à spin demi-entier à la statistique de Fermi-Dirac est la parité du nombre d'indices de la fonction d'onde, écrite sous forme spinorielle. — Enfin, l'on étudie séparément le cas dégénéré de la masse nulle.

A. Proca (Paris).

Astrophysik.

Fessenkoff, B.: Sur la transparence de l'atmosphère terrestre. *Astron. J. Soviet Union* 15, 445—448 u. franz. Zusammenfassung 449 (1938) [Russisch].

Aus visuellen Beobachtungen ausgewählter Sterne in Zenitdistanzen von ca. 75 bis 85°, die der Verf. Ende August 1927 in der Umgegend von Odessa angestellt hat, findet er in allen Azimuten wesentlich größere Extinktionsbeträge, als der Zunahme mit $\sec z$ entsprechen würde. Dieser Befund kann durch Annahme isolierter absorbierender Massen, die in großer Anzahl gleichmäßig längs horizontaler Atmosphärenschichten verteilt sind, nicht erklärt werden; speziellere Massenverteilungen relativ zum Beobachter können in einem bestimmten z -Intervall einen stärkeren Gang der Extinktion als $\sec z$ ergeben.

Straßl (Göttingen).

Lönnqvist, Conrad: On the influence of the major planets on the meteorite tracks and a criticism of the meteorite hypothesis of the sunspot periodicity. *Meddel. Lunds astron. Observ.*, I. s. Nr 136, 1—12 (1939).

Malmqvist [*Meddel. Lunds astron. Observ.* 2, Nr 90 (1937)] has put forward the hypothesis that sunspots are caused by the bombardment of the Sun by meteorites, and their periodicity by the periodically varying screening effect of the planets. The author puts forward criticisms of this hypothesis, based chiefly on dynamical considerations. He shows that the major planets would produce an accumulating effect, rather than a screening effect, but that the effect would not be large enough to account for sunspot variation. In addition, he shows that the sunspot periodicity is not sufficiently closely related to the periodicity of the planetary motions to agree with the hypothesis, and also that meteorites would not all be expected to enter the solar system with velocities nearly parallel to the plane of the ecliptic, as required by the hypothesis.

W. H. McCrea (Belfast).

Nölke, F.: Über den Ursprung der Kometen. *Astron. Nachr.* 268, 87—92 (1939).

In the first part of the paper the author discusses the recent hypothesis of Corlin that comets are at the present time still being incorporated in the solar system by the action of a resisting medium in which the system is imbedded. He is led to reject that hypothesis, since it would imply the existence of comets with hyperbolic orbits, contrary to observational facts. The author further remarks that a consideration of the velocities at aphelion of the comets with long periods leads to the conclusion that the velocity of the sun relative to the resisting medium is less than the order of magnitude of those velocities; and the probability for this condition to be fulfilled must be extremely small, for otherwise the sun would have the privilege of being the only star among its neighbours which is practically at rest relative to the resisting medium. The second part of the paper discusses the author's own hypothesis that the capture of the comets took place in a not very distant past, when the sun went through some cosmic nebula, and a review of his previous work on the problem is given. It is suggested that the nebula responsible for the capture of the comets may have been the dark cloud in Scutum or Ophiuchus.

Steensholt (Kopenhagen).

Roach, F. E.: On the relative abundance of CN, C₂, CH, NH, and OH in the solar reversing layer. *Astrophys. J.* 89, 99—115 (1939).

The author develops a method for the evaluation of the abundance of molecules of a given kind in the solar atmosphere from the intensity of a single resolved rotational line. Briefly the work runs as follows: a) The relationship between the population of a given level and the total number of molecules is developed. b) The population of a given level is determined from line intensities. c) The quantity $S \cdot f$ (S = molecular abundance, f = absolute intensity factor) is derived by combination of the results obtained under a and b. d) From experimental knowledge of the quantity f it would be possible to compute S . However the absolute value of f is known only for OH. Assuming that f is the same for all the molecules considered and equal to 10^{-3} , the

author determines values of $\log S$. They turn out to be systematically higher than those previously found by Russel. Finally the excitation temperature of the sun is found from certain bands of CN and OH. The values given by the author are $5630 \pm 500^\circ \text{K}$ and $4640 \pm 550^\circ \text{K}$ respectively. *Steensholt* (Kopenhagen).

Struve, O., K. Wurm and L. G. Henyey: Astrophysical consequences of metastable levels in hydrogen and helium. *Proc. nat. Acad. Sci., Wash.* **25**, 67—73 (1939).

The authors discuss some astrophysical problems connected with the existence of metastable levels in hydrogen (2S) and helium (2^1S and 2^3S). For the Orion Nebula the emission lines of H and He are very strong. In absorption only the line $\lambda 3889$ (arising from the metastable 2^3S level of helium) is seen superposed over the continuous spectra of the stars which shine through the nebula. However, in spite of the fact that hydrogen is certainly much more abundant than helium, no hydrogen lines arising from the metastable 2S level have been found. The authors explain this discrepancy as due to the change of life time of the metastable H-atom caused by the electric field set up by the electrons in the gas. The magnitude of the effect clearly depends upon the electron density. It is shown that for the metastable states of helium this effect is by far not so important as in the case of hydrogen. *Steensholt* (Kopenhagen).

Mimura, Yositaka, and Toranosuke Iwatsuki: Cosmology in terms of wave geometry. I. General discussion. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* **8**, 193—197 (1938).

Gaposchkin, Sergei: A new eclipsing variable of large mass. *Astrophys. J.* **89**, 125—129 (1939).

Nachdem der spektroskopische Doppelstern HD 163181 als Bedeckungsveränderlicher erkannt war, hat der Verf. aus mehr als tausend photographischen Beobachtungen aus dem Zeitraum 1899—1937 die photographische Lichtkurve abgeleitet, die zwei nahe gleich tiefe (mindestens $0,4^m$), scharfe und gut definierte Minima aufweist. Beide Komponenten unterscheiden sich wenig in ihren Helligkeiten und Massen. Da die Radialgeschwindigkeitskurve nur für eine Komponente vorliegt, konnten die absoluten Dimensionen des Systems nicht vollständig definitiv ermittelt werden. Bei plausibler Schätzung des Verhältnisses der Massen aus dem der Leuchtkräfte ergibt sich für die Massen $m_1 = 44,38 \odot$, $m_2 = 40,82 \odot$, für die Radien $r_1 = 5,71 \odot$, $r_2 = 5,23 \odot$. Die Gesamtmasse ist danach noch etwas größer als die des massereichsten der bisher bekannten Systeme von Bedeckungsveränderlichen. *Straßl* (Göttingen).

Hachenberg, O.: Der Aufbau des kugelförmigen Sternhaufens Messier 92. *Z. Astrophys.* **18**, 49—88 (1939).

The author has made a study of the variable stars in the globular cluster M 92. From the mean luminosity of these stars the distance and the linear dimensions of the cluster have been determined. By counting stars in the cluster, it is possible to draw conclusions about the distribution and the total number of stars. The author has determined photographic and photovisual luminosities of 720 stars, and the colour-luminosity diagram is set up and discussed. Finally a comparison of Messier 92 with other globular clusters shows the existence of certain peculiarities in the frequency distribution of the periods of the variable stars in different clusters. *Steensholt*

Palmér, Frida: Studies of irregular variable stars. *Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr 103*, 1—168 (1939).

Für die unregelmäßigen Veränderlichen wird die Korrelation der verschiedenen den Lichtwechsel beschreibenden Größen sowie die Verteilung der scheinbaren und absoluten Helligkeiten nach bekannten Methoden der Stellarstatistik untersucht. Es ergeben sich u. a. Hinweise auf zwei Gruppen verschiedener Leuchtkraft (Riesen und Überriesen) und eine Einordnungsmöglichkeit in die von den regelmäßigen Veränderlichen bekannte Perioden-Leuchtkraft-Beziehung. Ferner werden die Bewegungen (z. T. mit neuem Beobachtungsmaterial) und die räumliche Anordnung behandelt; viele damit zusammenhängende Einzelfragen, z. B. die interstellare Absorption, werden ausführlich erörtert. *Wempe* (Jena).

Pişmiş, Paris: On the interpretation of the K-term. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. 3, 311—333 (1938).

Verf. diskutiert von neuem die von Plaskett und Pearce bestimmten und bearbeiteten Radialgeschwindigkeiten. Plaskett und Pearce hatten einen recht geringen mittleren K-Effekt (1—2 km/sec) erhalten und dem nur für die Gruppe der allernächsten O- und B-Sterne gefundenen hohen Wert (etwa 7 km/sec) keinen ernsthaft systematischen Charakter zugesprochen. Verf. gibt dem Befund die Deutung, daß der K-Effekt sich zusammensetzt aus einer durch die Sternmasse und -dichte bedingten, von der Entfernung natürlich unabhängigen relativistischen Rotverschiebung und einem Betrag, der am Ort des Beobachters verschwindet, aber mit zunehmender Entfernung vom Beobachter immer stärker negativ wird und die relativistische Rotverschiebung kompensiert. Dieser Betrag stellt also eine Kontraktion der uns umgebenden Stern Gesamtheit dar. Die Schwierigkeit, daß die zur Erklärung der starken Rotverschiebung anzunehmenden hohen Werte für Sternmassen und -dichten schlecht zu den anderweitig begründeten Vorstellungen passen, wird erwähnt, aber nicht als ernsthaft angesehen. Die Kontraktionsbewegung würde sich verstehen lassen durch die Annahme, daß das lokale System eine exzentrische Bahn um ein fernes Zentrum beschreibt, auf der es sich z. Z. von diesem Zentrum entfernt. *Straßl.*

Corlin, Axel: On the building up of larger bodies from small particles in interstellar space. Z. Astrophys. 18, 1—24 (1939).

The author has proposed the hypothesis [Z. Astrophys. 15, 239 (1938); Bergstrand Celebration Volume 1938] that meteorites and comets are built up in interstellar space by the capture of smaller particles, in order to avoid the difficulties in the theory that they originate in the solar system. The interaction between the particles is electrostatic. For reasons explained each particle is supposed to be surrounded by an electron-atmosphere, the whole system being approximately of neutral total charge. The author considers first the equations of motion of a meteorite through a cloud of smaller particles. The difficulty as to whether the ordinary laws of motion can be applied to a system of variable mass is overcome by regarding the meteorite, together with the particles which it can capture, as a single system. The remaining particles constitute a resisting medium. The author shows that if the mass increase follows the law

$$dm/dt = k_e m^{2/3}$$

so that it is proportional to the surface-area of the body, then, under stated conditions,

$$k_e = \frac{\pi \rho}{(\frac{4}{3} \pi \rho_b)^{2/3}} \frac{V^2}{\Delta V},$$

where V is the velocity of the body relative to the resisting medium, ΔV is the mean velocity of the particles captured in $(t, t + dt)$, relative to the body, ρ_b is the density of the body, and ρ the density of the nebular matter. The major part of the paper is concerned with the evaluation of the parameters in k_e from the available data on meteors and on interstellar matter in general. The author gives a full discussion of the electrical conditions of the particles concerned. He concludes that the main source of their electric charge is photo-ionisation by stellar radiation, though cosmic ray bursts may play a part in determining the limiting size of permanently charged systems. The resulting picture of the electrical state enables him then to study in detail the mechanism of capture, which in turn enables him to relate ΔV to the velocity of escape of a small particle from the electric field of the meteorite. He concludes finally, "the rate of mass-increase according to a law proportional to the surface of the meteorite leads to ages of such bodies of about the same order of magnitude as those found by Paneth. In addition, bodies as large as comets are built up according to the same law and the same constant k_e during the life-time of the galaxy according to the so-called long time-scale".

W. H. McCrea (Belfast).